

КАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

САМАРУК НАТАЛІЯ МИКОЛАЇВНА

УДК 519.4

ДИСЕРТАЦІЯ

**КВАЗІ-МОНОМІАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ ПІДГРУП АФІННОЇ
ГРУПИ**

111 — Математика

11 — Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Н. М. Самарук

Наукові керівники: Бедратюк Леонід Петрович, доктор фізико-математичних наук, професор та Кравців Вікторія Василівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент

м. Івано-Франківськ — 2026

АНОТАЦІЯ

Самарук Н.М. Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. — Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Міністерство освіти і науки України, м. Івано-Франківськ, 2026.

Дисертація присвячена дослідженню квазі-мономів відносно підгруп афінних груп перетворень площини та простору.

Для розпізнавання та класифікації зображень за допомогою алгоритмів машинного навчання необхідно побудувати такі ознаки, які залишаються інваріантними відносно геометричних перетворень площини, що не змінюють структури сцени. У випадку двовимірних зображень до таких перетворень належать обертання, паралельні перенесення, масштабування та їхні композиції. Відповідні інваріантні характеристики називають моментними інваріантами. Залежно від вибору базису в просторі многочленів $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$, де m, n — цілі невід’ємні числа (тут і надалі в тексті), розглядаються різні системи моментів. У найпростішому випадку, коли $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$, отримуються геометричні моменти. Ці класичні моменти були вперше запропоновані автором М.-К. Ху (Hu M.-K.) та стали основою побудови 2D-інваріантних ознак відносно паралельних перенесень, масштабувань і обертань. Алгебра відповідних моментних інваріантів детально вивчена, зокрема в роботах Я. Флюссера (Flusser J.) та Л. Бедратюка, де було наведено явний опис породжуючих елементів.

Проте практичне використання геометричних моментів стикається з проблемами чисельної нестабільності при обчисленнях у дискретних областях, особливо для великих зображень. Це спонукало дослідників до переходу на інші, обчислювально стійкіші базиси — ортогональні або псевдоорто-

гональні. Однак при цьому виникла нова проблема: як зручно виражати та обчислювати інваріанти за змінного базису. Дослідники Ч.-В. Чонг, П. Равендран, Р. Мукундан (Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R.) знайшли розв'язання цієї задачі лише в окремих випадках — наприклад, для моментів Лежандра без урахування обертання. Проте загальний підхід залишався складним і недостатньо розробленим.

Вирішальним стало відкриття Б. Яна, Х. Чжана та М. Дая (Yang B., Zhang H., Dai M.), які виявили, що при виборі базису

$$\pi_{m,n}(x, y) = H_m(x)H_n(y),$$

де $\{H_n(x)\}$ — класичні многочлени Ерміта, форма моментних інваріантів відносно групи $SO(2)$ збігається з формою геометричних моментів. Це несподіване співпадіння дозволило ефективно обчислювати ермітові ортогональні моменти, інваріантні до обертання.

Подальший розвиток цієї ідеї був здійснений у роботах Л. Бедратюка, Я. Флюссера, Т. Сака, Я. Косткової та Я. Кауцького (Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J.). У своїй праці вони запропонували повний опис усіх многочленів, які мають властивість зберігати форму моментних інваріантів при зміні базису. Ця властивість дістала назву квазі-мономіальності. Знання таких квазі-мономіальних многочленів (*далі – квазі-мономів*) для основних груп перетворень площини й простору є важливим для побудови швидких і стабільних алгоритмів обчислення моментних інваріантів.

Запропонований підхід природно узагальнюється на тривимірний випадок, де замість функцій двох змінних розглядаються функції трьох змінних, що дає змогу застосовувати аналогічні ідеї для аналізу 3D-зображень.

У зв'язку з цим актуальним є дослідження квазі-мономів для різних підгруп афінних груп перетворень площини й простору та встановлення їхніх властивостей. Отримані результати мають значення не лише для прикладних

задач розпізнавання образів і аналізу зображень, але й для суміжних галузей — комбінаторики, теорії груп і теорії спеціальних функцій.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження. Визначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок дисертаційної роботи з науковими темами, зазначено особистий внесок здобувача, а також подано інформацію про апробацію та публікацію результатів дослідження.

Основна частина дисертації складається з чотирьох розділів, кожен із яких поділений на підрозділи. Наприкінці кожного розділу сформульовано узагальнюючі висновки.

Перший розділ має підготовчий характер і присвячений аналізу літератури за темою дослідження. У ньому здійснено вибір методології, сформульовано підходи до побудови теорії квазі-мономів та наведено допоміжні результати, необхідні для подальших досліджень.

Другий розділ присвячено означенню та дослідженню основних властивостей квазі-мономів відносно підгруп афінної групи площини.

У підрозділі 2.1 розглянуто формування основних математичних понять, що передують введенню квазі-мономів, та подано означення квазі-мономіальності. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається квазі-мономіальною відносно підгрупи H афінної групи $\text{Aff}(2)$, якщо вона утворює такий базис простору многочленів від двох змінних, у якому дія групи H задається матрицями, тотожними тим, що відповідають дії H в стандартному мономіальному базисі $x^m y^n$. Такі многочлени називаються квазі-мономами.

У підрозділі 2.2 наведено основні означення та теореми щодо квазі-мономів відносно групи обертань площини $SO(2)$. Сформульовано крите-

рій квазі-мономіальності у термінах експоненціальної породжуючої функції.

Зокрема, функція

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!}$$

є породжуючою функцією квазі-мономіальної сім'ї многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ відносно $SO(2)$ тоді й лише тоді, коли $G = G(ux + vy, x^2 + y^2, u^2 + v^2)$. Окремо розглянуто диференціальні рівняння, яким задовольняють квазі-мономи $SO(2)$.

У підрозділі 2.3 дається схожий опис квазі-мономів щодо неперервних підгруп перетворень афінної групи площини, а саме групи масштабувань. Сформульовано критерій квазі-мономіальності: сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією G , є квазі-мономіальною відносно групи масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією двох змінних $G = G(xu, yv)$.

У підрозділі 2.4 розглянуто квазі-мономи щодо групи рівномірних масштабувань площини. Встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією G , є квазі-мономіальною щодо групи рівномірних масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних: $G = G\left(\frac{y}{x}, ux, vx\right)$.

У підрозділі 2.5 описано квазі-мономи щодо групи паралельних перенесень площини та наведено критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів відносно цієї групи у термінах її експоненціальної породжуючої функції. Зокрема, доведено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $G = C(u, v)e^{xu+yv}$, де $C(u, v)$ — довільний степеневий ряд за змінними u, v .

Крім того, встановлено який вид нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності. Також наведено рекурентні співвідношення для сім'ї

многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$.

У підрозділі 2.6 дається схожий опис квазі-мономів щодо групи рівномірних паралельних перенесень площини. Встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ буде квазі-мономіальною сім'єю відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $G = C(x - y, u, v)e^{xu+yv}$ де C – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, u, v$.

Третій розділ присвячено опису квазі-мономів від трьох змінних відносно підгруп афінної групи простору $\text{Aff}(3)$.

У підрозділі 3.2 розглянуто квазі-мономи щодо групи масштабувань простору. Доведено, що сім'я $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли виконується:

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = s^m t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

для всіх $s, t, r \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Також описано всі сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними відносно групи масштабувань простору в термінах породжуючої функції. Доведено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненційною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} \frac{w^k}{k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи масштабувань простору тоді і тільки тоді, коли G є функцією від трьох змінних: $G = G(xu, yv, zw)$.

У підрозділі 3.3 дається опис квазі-мономів щодо групи рівномірних масштабувань простору та встановлюється той факт, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненційною породжуючою функцією G , буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань простору

тоді і тільки тоді коли G є функцією від змінних:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

У підрозділі 3.4 описано квазі-мономи щодо групи паралельних перенесень простору та наведено китерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції. Зокрема, показано, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд за змінними u, v, w .

Крім того, встановлено який тип нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

У підрозділі 3.5 дається схожий опис квазі-мономів щодо групи рівномірних паралельних перенесень простору. Зокрема, встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень тоді і тільки тоді коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де C – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, x - z, u, v, w$.

Четвертий розділ є просторовим аналогом другого розділу й присвячений опису квазі-мономів відносно групи обертань простору $SO(3)$.

У підрозділі 4.2 наведено визначення дії спеціальної ортогональної тривимірної групи $SO(3)$ на многочлени $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ через розкладання за певним комбінаторним законом, що забезпечує збереження квазі-мономіальної форми. Встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією G , є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних:

$$G = G(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2).$$

Крім того, наведено приклад, у якому доведено, що многочлени Ерміта від трьох змінних є квазі-мономами відносно $SO(3)$, а також встановлено умови нормалізації, які зберігають квазі-мономіальність.

У підрозділі 4.3 наведено приклади біортогональних многочленів Аппеля, які є квазі-мономами $SO(3)$, а також подано рекурентні співвідношення, що забезпечують ефективність їх обчислення.

Ключові слова: квазі-мономіальні многочлени, квазі-мономи, поліноми, групи, матричні групи, підгрупа, афінна група, афінні перетворення площини та простору, групи обертань $SO(2)$ та $SO(3)$, група масштабувань, група паралельних перенесень, многочлени Аппеля, матриця, експоненціальна породжуюча функція.

ABSTRACT

Samaruk N.M. Quasi-monomial polynomials of subgroups of an affine group.
— Qualifying scientific work as a manuscript.

Dissertation for obtaining the degree of Doctor of Philosophy in specialty 111 Mathematics. — Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Ivano-Frankivsk, 2026.

The dissertation is devoted to the study of quasi-monomial polynomials with respect to subgroups of affine transformation groups of plane and space.

For recognition and classification of images using machine learning algorithms, it is necessary to construct features that remain invariant with respect to geometric transformations of the plane that do not change the structure of the scene. In the case of two-dimensional images, such transformations include rotations, parallel translations, scaling, and their compositions. The corresponding invariant characteristics are called moment invariants. Depending on the choice of basis in the polynomial space $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$, where m, n are non-negative integers (here and further in the text), different moment systems are considered. In the simplest case, when $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$, geometric moments are obtained. In the simplest case, when $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$, geometric moments are obtained. These classical moments were first proposed by M.-K. Hu and became the basis for constructing 2D-invariant features with respect to parallel translations, scaling, and rotations. The algebra of corresponding moment invariants has been studied in detail, particularly in the works of J. Flusser and L. Bedratyuk, where an explicit description of generating elements was provided.

However, practical use of geometric moments faces problems of numerical instability in calculations in discrete domains, especially for large images. This prompted researchers to switch to other, computationally more stable bases — orthogonal or pseudo-orthogonal. However, this created a new problem: how to conveniently express and calculate invariants when the basis is changed.

Researchers C.-W. Chong, P. Raveendran, and R. Mukundan found solutions to this problem only in special cases — for example, for Legendre moments without considering rotation. However, the general approach remained complex and insufficiently developed.

The breakthrough came with the discovery by B. Yang, G. Li, H. Zhang, and M. Dai, who found that when choosing the basis

$$\pi_{m,n}(x, y) = H_m(x)H_n(y),$$

where $\{H_n(x)\}$ are the classical Hermite polynomials, the form of moment invariants with respect to the group $SO(2)$ coincides with the form of geometric moments. This unexpected coincidence allowed for efficient computation of Hermite orthogonal moments invariant to rotation.

Further development of this idea was carried out in the works of J. Flusser, L. Bedratyuk, T. Suk, J. Kostkova, and J. Kautsky. In their work, they proposed a complete description of all polynomials that have the property of preserving the form of moment invariants when changing the basis. This property was named quasi-monomiality. Knowledge of such quasi-monomials for the main groups of transformations of the plane and space is important for constructing fast and stable algorithms for computing moment invariants.

The proposed approach naturally generalizes to the three-dimensional case, where instead of functions of two variables, functions of three variables are considered, which allows applying similar ideas for analyzing 3D images.

Therefore, the study of quasi-monomials for various subgroups of affine transformation groups of the plane and space and the establishment of their properties is relevant. The obtained results are significant not only for applied problems of pattern recognition and image analysis but also for related fields — combinatorics, group theory, and the theory of special functions.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, a list of

symbols, an introduction, four chapters of the main part, conclusions, a list of references, and appendices.

The introduction substantiates the relevance of the chosen topic, formulates the purpose, object, subject, tasks, and research methods. The scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the connection of the dissertation work with scientific topics are determined, the personal contribution of the candidate is specified, and information on the approbation and publication of research results is provided.

The main part of the dissertation consists of four chapters, each divided into subsections. At the end of each chapter, generalizing conclusions are formulated.

The *first chapter* is preparatory in nature and is devoted to the analysis of literature on the research topic. It carries out the choice of methodology, formulates approaches to constructing the theory of quasi-monomials, and provides auxiliary results necessary for further research.

The *second chapter* is devoted to the meaning and study of the basic properties of quasi-monomials with respect to subgroups of the affine group of the plane.

Subsection 2.1 examines the formation of the basic mathematical concepts preceding the introduction of quasi-monomials and provides the definition of quasi-monomiality. A family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$ is called quasi-monomial with respect to a subgroup H of the affine group $\text{Aff}(2)$ if it forms a basis for the space of polynomials in two variables in which the action of the group H is given by matrices identical to those corresponding to the action of H in the standard monomial basis $x^m y^n$. Such polynomials are called quasi-monomials.

In subsection 2.2, the basic definitions and theorems regarding quasi-monomials with respect to the group of rotations of the plane $SO(2)$ are presented. The criterion of quasi-monomiality is formulated in terms of the exponential

generating function. In particular, the function

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!}$$

is a generating function of the quasi-monomial family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$ with respect to $SO(2)$ if and only if $G = G(ux+vy, x^2+y^2, u^2+v^2)$. The differential equations satisfied by the quasi-monomials $SO(2)$ are separately considered.

In subsection 2.3, a similar description of quasi-monomials with respect to continuous subgroups of transformations of the affine group of the plane, namely the scaling group, is given. A criterion of quasi-monomiality is formulated: a family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$, defined by the exponential generating function G , is quasi-monomial with respect to the scaling group of the plane if and only if G is a function of two variables: $G = G(xu, yv)$.

In subsection 2.4, quasi-monomials with respect to the group of uniform scalings of the plane are considered. It is established that a family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$, defined by the exponential generating function G , is quasi-monomial with respect to the group of uniform scalings of the plane if and only if G is a function of three variables: $G = G\left(\frac{y}{x}, ux, vx\right)$.

In subsection 2.5, quasi-monomials with respect to the translation group of the plane are described, and a criterion for the quasi-monomiality of a family of polynomials with respect to this group is given in terms of its exponential generating function. It is proved that a family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$ is quasi-monomial with respect to the translation group of the plane if and only if its exponential generating function has the form $G = C(u, v)e^{xu+yv}$, where $C(u, v)$ – is an arbitrary power series in variables u, v .

Additionally, the type of normalization that preserves the property of quasi-monomiality is established. Recurrence relations for the family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$ are also provided.

In subsection 2.6, a similar description of quasi-monomials with respect to

the uniform translation group of the plane is given. It is established that a family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$ will be a quasi-monomial family with respect to the uniform translation group of the plane if and only if its exponential generating function has the form $G = C(x - y, u, v)e^{xu+yv}$, where C – is an arbitrary power series in variables $x - y, u, v$.

The *third chapter* is devoted to the description of quasi-monomials of three variables with respect to subgroups of the affine group of space $\text{Aff}(3)$.

In subsection 3.2, quasi-monomials with respect to the scaling group of space are considered. It is proved that a family $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ is quasi-monomial if and only if the following holds:

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = s^m t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

for all $s, t, r \in \mathbb{R}$ and $m, n, k \in \mathbb{N}$.

All families of polynomials that are quasi-monomial with respect to the scaling group of space are also described in terms of the generating function. It is proved that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, defined by the exponential generating function

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

will be quasi-monomial with respect to the scaling group of space if and only if G is a function of three variables: $G = G(xu, yv, zw)$.

In subsection 3.3, a description of quasi-monomials with respect to the group of uniform scalings of space is given, and it is established that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, defined by the exponential generating function G , will be quasi-monomial with respect to the group of uniform scalings of space if and only if G is a function of the variables:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

In subsection 3.4, quasi-monomials with respect to the translation group of space are described, and a criterion of quasi-monomiality for a family of polynomials is given in terms of its exponential generating function. In particular, it is shown that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ is a quasi-monomial family with respect to the translation group of space if and only if its exponential generating function has the form $G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, where $C(u, v, w)$ – is an arbitrary power series in variables u, v, w . Additionally, the type of normalization that preserves the property of quasi-monomiality is established.

In subsection 3.5, a similar description of quasi-monomials with respect to the uniform translation group of space is given. In particular, it is established that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ will be quasi-monomial with respect to the uniform translation group if and only if its exponential generating function has the form $C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, where C – is an arbitrary power series in variables $x - y, x - z, u, v, w$.

The *fourth chapter* is the spatial analogue of the second chapter and is devoted to the description of quasi-monomials with respect to the rotation group of space $SO(3)$. In subsection 4.2, the definition of the action of the special orthogonal three-dimensional group $SO(3)$ on polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ is given through decomposition according to a certain combinatorial law, which ensures the preservation of the quasi-monomial form. It is established that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, defined by the exponential generating function G , is quasi-monomial if and only if G is a function of three variables:

$$G = G(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2).$$

In addition, an example is given in which it is proven that Hermite polynomials in three variables are quasi-monomials with respect to $SO(3)$, and normalization conditions that preserve quasi-monomiality are established.

In subsection 4.3, examples of biorthogonal Appell polynomials that are

quasi-monomials $SO(3)$ are given, as well as recurrence relations that ensure the efficiency of their computation.

Keywords: quasi-monomial polynomials, quasi-monomials, polynomials, groups, matrix groups, subgroup, affine group, affine transformations of the plane and space, rotation groups $SO(2)$ and $SO(3)$, scaling group, translation group, Appel polynomials, matrix, exponential generating function.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях України (категорії Б):

1. Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору* // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». — 2023. — Т. 42. № 1. — С. 79-89.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).79-89](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).79-89)

URL: <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/issue/view/16001>

Статті у періодичних виданнях, включених до наукометричної бази SCOPUS:

2. Samaruk N. M. *Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group* // Matematychni studii. — 2023. — Vol. 59. № 1. — P. 3–11.

DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.59.1.3-11>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85163287621>

3. Samaruk N.M. *$SO(3)$ quasi-monomial polynomial families* // Carpathian Math Publ. — 2024. — Vol. 16. № 1. — P. 40-52.

DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.16.1.40-52>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85199423386>

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Samaruk N.M. *Quasi-monomials with respect to rotation and translation subgroups of affine plane group* // The International online conference «Current trends in abstract and applied analysis» (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 12-15 May 2022): book of abstracts. — Ivano-Frankivsk, 2022. — P. 68.

URL: <https://conference.pu.if.ua/cta/BookOfAbstracts.pdf>

5. Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини* // Міжнародна алгебраїчна конференція «Під кінець року 2022» (Київ, Україна, 27-28 грудня 2022 р.): тези доповідей. — Київ, 2022. — С.70.

URL: <https://www.imath.kiev.ua/~algebra/algebra2022/abstracts>

6. Samaruk N. *3D quasi-monomials* // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» (Kyiv, Ukraine, 26-27 December 2023): book of abstracts. — Kyiv, 2023. — P. 49.

URL: https://drive.google.com/file/d/1F2OyRq50ktbiRHgna_n509RnfFPp_VZ4/view

7. Самарук Н. *Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору $SO(3)$* // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.): тези доповідей. — Чернівці, 2024. — С. 94-95.

URL: <https://hahn.chnu.edu.ua/media/odblmui/book-of-abstracts.pdf>

8. Samaruk N. *$SO(3)$ -quasi-monomial families of Appell polynomials* // The 15th Ukraine Algebra Conference (Lviv, Ukraine, 8–12 July 2025): book of abstracts. — Lviv, 2025. — P. 95.

URL: <https://xvuac.mmf.com.ua/index.php/abstracts>

ЗМІСТ

| | |
|--|----|
| ВСТУП | 22 |
| РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ВИБІР МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ | 57 |
| 1.1 Загальні відомості про моментні інваріанти та квазі-мономіальні базиси | 57 |
| 1.2 Поняття квазі-мономіальності та його еволюція | 60 |
| 1.3 Квазі-мономи в 3D: група $Aff(3)$ та підгрупи | 62 |
| 1.4 Методи дослідження та допоміжні інструменти | 63 |
| 1.5 Узагальнення результатів аналізу | 68 |
| РОЗДІЛ 2. КВАЗІ-МОНОМИ ВІДНОСНО ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ ПЛОЩИНИ | 72 |
| 2.1 Формулювання задачі | 72 |
| 2.2 Квазі-мономи відносно групи обертань площини | 75 |
| 2.3 Квазі-мономи відносно групи масштабувань площини | 77 |
| 2.4 Квазі-мономи відносно групи рівномірних масштабувань площини . | 79 |
| 2.5 Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень площини . . | 81 |
| 2.6 Квазі-мономи відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини | 87 |
| РОЗДІЛ 3. КВАЗІ-МОНОМИ ВІДНОСНО ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ ПРОСТОРУ | 90 |
| 3.1 Постановка задачі та основні визначення квазі-мономіальності в просторі | 90 |

| | | |
|--|--|-----|
| 3.2 | Квазі-мономи відносно групи масштабувань простору | 92 |
| 3.3 | Квазі-мономи відносно групи рівномірних масштабувань простору . | 96 |
| 3.4 | Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору . . | 97 |
| 3.5 | Квазі-мономи відносно групи рівномірних паралельних перенесень простору | 103 |
| РОЗДІЛ 4. $SO(3)$ -КВАЗІ-МОНОМІАЛЬНІ СІМ'Ї | | 108 |
| 4.1 | Аналіз $SO(3)$ -інваріантності та застосування біортогональних мно- гочленів Аппеля | 108 |
| 4.2 | $SO(3)$ -квазі-мономи | 109 |
| 4.3 | Многочлени Аппеля від трьох змінних | 120 |
| 4.4 | Застосування квазі-мономів | 129 |
| ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ | | 134 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ | | 136 |
| ДОДАТКИ | | 144 |

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

| | |
|--------------------------|---|
| \times | — напівпрямий добуток груп. |
| $\text{Aff}(2)$ | — афінна група перетворень площини. |
| $\text{Aff}(3)$ | — афінна група перетворень тривимірного простору. |
| $\{B_{m,n}(x, y)\}$ | — сім'я многочленів від двох змінних, індексованих парою цілих невід'ємних чисел (m, n) . |
| $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ | — сім'я многочленів від трьох змінних, індексованих трійкою цілих невід'ємних чисел (m, n, k) . |
| $G(x, y; u, v),$ | — експоненціальна породжуюча функція від- |
| $G(x, y, z; u, v, w)$ | повідної сім'ї многочленів. |
| $H_m(x)$ | — многочлен Ерміта від однієї змінної. |
| \mathbb{R}^* | — група дійсних чисел без нуля відносно множення. |
| $\text{SO}(n)$ | — група обертань простору \mathbb{R}^n . |
| $\text{SO}(2)$ | — група обертань площини навколо початку координат. |
| $\text{SO}(3)$ | — група обертань тривимірного простору. |
| $T(2)$ | — група паралельних перенесень площини. |
| $GL(n)$ | — загальна лінійна група невідроджених матриць порядку n . |

| | |
|----------------------------|--|
| T | — оператор дії групи у відповідному просторі. |
| $x^m y^n,$ | — елементи стандартного степеневого базису від двох або трьох змінних. |
| $x^m y^n z^k$ | |
| $\mu_{p,q}(f),$ | — геометричні моменти функції (зображення) у 2D чи 3D. |
| $\mu_{p,q,r}(f)$ | |
| $\{\pi_{m,n}(x, y)\},$ | — базис векторного простору многочленів від двох та трьох змінних. |
| $\{\pi_{m,n,k}(x, y, z)\}$ | |

ВСТУП

Актуальність теми дослідження.

Теорія зображень груп і спеціальних функцій, яка добре відома серед математиків, відіграє важливу роль у машинному навчанні, зокрема в теорії розпізнавання образів та аналізі 2D і 3D-зображень. Для розпізнавання, класифікації та виділення об'єктів на зображеннях за допомогою методів машинного навчання необхідно знаходити ознаки, що залишаються інваріантними до геометричних перетворень, які не спотворюють сцену зображення. Зображення ототожнюється з кусково-неперервною дійсною функцією від двох змінних $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, що визначена на компактній області Ω і яка має скінченний ненульовий інтеграл. Для 2D-зображень такими перетвореннями є обертання, паралельне перенесення та масштабування зображення. Відповідні інваріантні ознаки вперше були введені в статті [25] і називаються *моментними інваріантами*. З того часу моментні інваріанти активно використовуються в розпізнаванні образів, їм присвячено значну кількість статей. Все це підкреслює важливість математичного апарату для створення інваріантних ознак, які дозволяють системам машинного навчання коректно розпізнавати об'єкти незалежно від їх положення, орієнтації та розміру на зображенні.

У сучасних дослідженнях з розпізнавання образів та аналізу даних все більшої уваги набуває ідея безпосереднього включення інваріантних (зокрема, квазі-мономіальних) моментів до архітектури глибоких нейронних мереж. Це зумовлено тим, що навіть найпоширеніші згорткові нейронні мережі (CNN) не володіють повною обертовою інваріантністю та здебільшого покладаються на аугментацію (штучне розширення навчальної вибірки обертаннями, масштабуваннями тощо). Такий підхід суттєво збільшує обсяг трену-

вальних даних, але не завжди гарантує високу якість розпізнавання під час значних змін орієнтації об'єкта.

Водночас, як продемонстровано у низці робіт [29–31], впровадження ротаційно інваріантних ознак на етапі пулінгу або ж на проміжних рівнях мережі, дає змогу зменшити потребу в масовій аугментації, істотно скоротити кількість параметрів і збільшити точність класифікації. Для формування таких інваріантних ознак використовують різноманітні системи моментів (Зерніке, Гауса-Ерміта), а віднедавна — і квазі-мономіальні базиси на основі многочленів Апеля. Завдяки їх здатності до зручної побудови ротаційних інваріантів, такі моменти інтегрують у так звані групо-еквіваріантні CNN (G-CNN) — особливу архітектуру згорткових мереж, що за означенням зберігає «еквіваріантність» відносно заданих груп перетворень (зокрема, обертань і зсувів). На виході мережі застосовують додаткові пулінгові операції, які забезпечують повну інваріантність до дії групи.

Поняття еквіваріантності було сформульовано Коеном і Веллінгом (Cohen T.S., Welling W.) [14], що дало поштовх до створення різноманітних групо-еквіваріантних методів, оснований на використанні симетрій та розподілу ваг [7, 24, 33, 34, 48]. Багато праць стосуються випадку обертань, коли об'єкти виникають з різними орієнтаціями: аерофотозйомка [9, 10, 22, 44], мікроскопічна візуалізація [11, 12], класифікація текстур [35] тощо. Щоб оцінити, наскільки модель дійсно використовує свої ваги в умовах обмежених вибірок, у деяких дослідженнях розглядають сценарій навчання без розширення (аугментації) взагалі, що призводить до жорстко (математично) інваріантних мереж [26, 32].

Одним із успішних прикладів такого підходу є архітектура H-NeXtA, у якій замість традиційних методів узагальнення ознак (таких як Global Average Pooling або моменти Зерніке) використовуються моменти Апеля — квазі-мономіальні функції, що формують несепарабельний базис із кращими

просторовими властивостями. Завдяки цьому мережа навчається розпізнавати характеристики, інваріантні до повороту та зсуву, без потреби в надмірному аугментуванні.

Експерименти на різномірних наборах даних — зокрема, 3D-сканах скульптур, МРТ-знімках, конфокальних мікрозображеннях та синтетичних колекціях із випадковими обертаннями — продемонстрували підвищення точності розпізнавання на 3–5% порівняно з базовими моделями, а також стійкість до геометричних спотворень (робастність). Наприклад, на наборі ShapeNet точність класифікації зросла з 87,2% до 91,0%.

Додатковою перевагою є скорочення кількості параметрів мережі, що, у свою чергу, зменшує ризик перенавчання. Завдяки цьому H-NeXtA може ефективно працювати навіть на обмежених за розміром вибірках, демонструючи водночас високу узагальнювальну здатність.

З огляду на це, застосування квазі-мономіальних базисів (зокрема, відносно групи обертань) у формуванні початкових ознак або проміжних шарів CNN є перспективним напрямом у розбудові глибоких архітектур, апріорі адаптованих до інваріантів відносно обертань. Таким чином, розробка та вивчення квазі-мономіальних многочленів (далі – квазі-мономів) відносно різних афінних і евклідових груп перетворень стають важливими не лише для класичних задач аналізу зображень (побудови інваріантів і класифікації об'єктів), а й для створення стабільних до поворотів (і ширше — до загальних геометричних перетворень) нейронних мереж.

Зазначимо, що *загальним π -моментом зображення порядку $m + n$* називається величина:

$$m_{m,n}(f(x, y)) = m_{mn} = \iint_{\Omega} f(x, y) \pi_{m,n}(x, y) dx dy,$$

де $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$ є базис векторного простору \mathcal{P}_2 многочленів від двох змінних. Залежно від вибору базису в просторі многочленів $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$, де m, n

– цілі невід’ємні числа (тут і надалі в тексті), розглядаються різні системи моментів. Для випадку $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$ такі моменти називаються геометричними моментами. Афінна група площини та її підгрупи природно діють на геометричні моменти і виникають відповідні алгебри моментних інваріантів. У застосуваннях особливий інтерес викликають інваріанти відносно дії групи G , яка є напівпрямим добутком групи паралельних перенесень площини $T(2)$ з прямим добутком групи рівномірних масштабувань \mathbb{R}^* і групи $SO(2)$ обертань площини:

$$G = (\mathbb{R}^* \times SO(2)) \rtimes T(2).$$

Група G є чотирипараметричною групою перетворень площини з такою дією на $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y)^\top \mapsto s \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

Введення моментних інваріантів було одним із яскравих прикладних застосувань класичної теорії інваріантів до проблеми класифікації. Відомо, що з геометричних моментів утворюються центральні моменти:

$$\mu_{mn}(f(x, y)) = \mu_{mn} = \iint_{\Omega} (x - \bar{x})^m (y - \bar{y})^n f(x, y) dx dy.$$

Тут

$$\bar{x} = \frac{m_{10}}{m_{0,0}}, \quad \bar{y} = \frac{m_{01}}{m_{0,0}},$$

де $m_{mn} = \mathbf{m}_{m,n}$ — геометричні моменти. Центральні моменти вже є інваріантами групи паралельних перенесень, а якщо їх відповідно нормалізувати

$$\eta_{m,n} = \frac{\mu_{m,n}}{\mu_{0,0}^{1+\frac{m+n}{2}}}, \quad m+n \geq 2,$$

то вони вже будуть і інваріантами групи масштабувань. Тому проблема знаходження інваріантів групи G звелася до знаходження функцій від нормалізованих центральних моментів, які будуть інваріантами відносно групи обертань $SO(2)$.

Алгебра моментних інваріантів групи G добре вивчена, зокрема відомий явний опис її породжуючих елементів [5, 20]. Проте, практичне використання геометричних моментів викликає труднощі через їхню обчислювальну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки степені $x^m y^n$ швидко ростуть при збільшенні розміру зображень. Для уникнення цієї проблеми замість геометричних моментів розглядають так звані ортогональні моменти, які породжуються базисом:

$$\pi_{m,n}(x, y) = G_m(x)G_n(y),$$

де $\{G_m(x)\}$ – деяка сім'я ортогональних многочленів. Також розглядають випадок і неортогональних многочленів, які утворюють базис в просторі многочленів \mathcal{P}_2 і які вже обчислювально стабільні. Але для негеометричних моментів виникає проблема обчислення моментних інваріантів, які тепер потрібно обчислювати в новому базисі. Зміна базису наштовхується на технічні труднощі і розв'язана лише для моментів Лежандра, причому для простих перетворень площини, які не включають повороти [13].

Принципово інший підхід було застосовано в статті [49]. Автори встановили цікавий і несподіваний факт – виявляється, що для моментів Ерміта $\pi_{m,n}(x, y) = H_m(x)H_n(y)$, де $H_m(x), H_n(x)$ – класичні многочлени Ерміта однієї змінної, форма інваріантних моментів відносно групи $SO(2)$ така сама як і для геометричних моментів. Це впливає із того, що матриця лінійного оператора повороту на кут T_θ з наступною дією на функції

$$T_\theta f(x, y) = f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi),$$

в базисі $\{x^m y^n\}$ така сама, як і в базисі $H_m(x)H_n(y)$. Таким чином, така

властивість многочленів Ерміта дозволила ефективно обчислювати моментні $SO(2)$ -інваріанти Ерміта зображень.

Сім'я многочленів $G_m(x)$, така, що при дії групи перетворень площини базис $G_m(x)G_n(y)$ змінюються аналогічно до того, як змінюються базис $x^m y^n$ називається квазі-мономіальною відносно цієї групи. Знання таких квазі-мономів для основних груп перетворень площини і простору є важливим для швидкого і стабільного обчислення відповідних моментних інваріантів зображень.

Ці самі ідеї і підходи можна застосувати і для 3D-зображень, узагальнивши поняття геометричного моменту на випадок функції трьох змінних.

Мета даної роботи є подальший розвиток поняття квазі-монома відносно групи обертань площини, вперше введеного в статті [49], та перенесення його на інші підгрупи групи перетворень площини та простору. В роботі буде введено поняття квазі-мономів для різних підгруп афінних груп перетворень площини і простору та встановлення їхніх властивостей.

Такий підхід показав свою ефективність і дозволив довести ряд результатів, які характеризують квазі-мономи відносно груп перетворень площини та простору, тобто тих груп які найчастіше використовуються на практиці в теорії розпізнавання образів.

Тому отримані результати є важливими та актуальними як для застосувань в теорії розпізнавання образів, аналізу зображень так і в комбінаториці, теорії груп та теорії спеціальних функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота не пов'язана з з науковими програмами, планами, темами.

Мета і завдання дослідження.

Метою дисертаційної роботи є опис спеціальних функцій, які є квазі-мономами відносно підгруп афінної групи площини та простору.

Відповідно до поставленої мети, сформульовано наступні *завдання до-*

слідження:

– описати квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини — зокрема, підгруп обертань, масштабувань, паралельних перенесень та їхніх композицій;

– побудувати породжуючі функції для квазі-мономів відносно підгруп афінної групи простору, а також визначити їх явний вигляд і вивести рекурентні співвідношення;

– дослідити квазі-мономи для підгрупи обертань простору через многочлени Аппеля, зокрема, показати, що ці многочлени є квазі-мономами, отримати їх явний вигляд, скласти відповідні рекурентні співвідношення;

– сформулювати умови, за яких задана експоненціальна породжуюча функція породжує систему квазі-мономів відносно відповідної підгрупи афінної групи площини або простору.

Об’єктом дослідження є експоненціальні породжуючі функції та визначені ними сім’ї многочленів від двох і трьох змінних, що виникають при дії підгруп афінних груп площини та простору.

Предметом дослідження є умови й закономірності, за яких експоненціальні породжуючі функції породжують квазі-мономіальні сім’ї, зокрема їхній вигляд, диференціальні критерії квазі-мономіальності та породжувані рекурентні співвідношення.

Методи дослідження: у роботі використано методи комбінаторики та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Наукова новизна отриманих результатів.

У дисертаційній роботі вперше одержано низку результатів, що становлять новий внесок у теорію квазі-мономіальних многочленів. Зокрема:

– Запроваджено поняття сімей квазі-мономіальних многочленів відносно підгруп афінних груп перетворень площини $\text{Aff}(2)$ та простору $\text{Aff}(3)$.

– Отримано повний опис у термінах експоненціальних породжуючих

функцій сімей квазі-мономіальних многочленів відносно таких підгруп афінних груп площини та простору: обертань, масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень.

– Побудовано явний приклад квазі-мономіальної сім'ї многочленів відносно підгрупи паралельних перенесень площини та встановлено рекурентні співвідношення для цієї сім'ї.

– Досліджено умови нормалізації, за яких зберігається квазі-мономіальність многочленів відносно групи паралельних перенесень площини та простору, а також відносно групи обертань простору.

– Доведено, що дві сім'ї біортогональних многочленів Аппеля від трьох змінних є квазі-мономіальними відносно групи обертань простору, та знайдено рекурентні співвідношення для цих сімей.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів.

Теоретичне значення роботи полягає у подальшому розвитку теорії квазі-мономіальних многочленів та її узагальненні на широкий клас підгруп афінних груп площини та простору. Запроваджений у роботі підхід, оснований на використанні експоненціальних породжуючих функцій, дозволяє отримати уніфікований опис квазі-мономіальних сімей та встановити необхідні й достатні умови їх існування. Це, зокрема, дає змогу:

– узагальнити класичну теорію моментних інваріантів на випадок довільних підгруп афінних груп $\text{Aff}(2)$ та $\text{Aff}(3)$;

– встановити властивості квазі-мономіальних сімей через аналітичні характеристики їх породжуючих функцій;

– поширити поняття квазі-мономіальності на тривимірний випадок і дослідити його зв'язок із групою обертань $SO(3)$;

– встановити зв'язок між квазі-мономіальними сім'ями та біортогональними многочленами Аппеля, що поглиблює взаємозв'язок між теорією спеціальних функцій, комбінаторикою та теорією груп.

Таким чином, результати дисертації формують цілісний аналітичний апарат для дослідження інваріантних поліноміальних базисів і розширюють сучасні уявлення про структуру многочленів, інваріантних відносно дії груп перетворень.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості їх застосування для побудови ефективних і чисельно стійких алгоритмів обробки даних, зокрема в задачах комп'ютерного зору та машинного навчання. Запропоновані квазі-мономіальні базиси та встановлені для них рекурентні співвідношення забезпечують:

- стабільне обчислення моментів високих порядків без експоненціального зростання похибок;
- побудову інваріантних ознак зображень відносно обертань, масштабувань та паралельних перенесень;
- зменшення обчислювальної складності алгоритмів за рахунок використання породжуючих функцій та рекурентних формул;
- можливість інтеграції квазі-мономіальних моментів у сучасні архітектури глибокого навчання (зокрема, групо-еквіваріантні нейронні мережі) для підвищення їх інваріантності та узагальнювальної здатності.

Отримані результати можуть бути використані при розробці систем розпізнавання образів, аналізу медичних та тривимірних зображень, а також у задачах обробки сигналів, робототехніки, біоінформатики та інших галузях, де суттєву роль відіграють інваріантні характеристики об'єктів.

Результати дослідження можуть бути використані в наукових дослідженнях, які проводяться у Карпатському національному університеті імені Василя Стефаника та інших закладах вищої освіти України.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, висвітлені в дисертації, отримано здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи

були представлені на таких конференціях та семінарах:

- Міжнародній онлайн конференції «Current trends in abstract and applied analysis» (Івано-Франківськ, 12-15 травня 2022 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції «Під кінець року 2022» (Київ, 27-28 грудня, 2022 р.);
- Міжнародній алгебраїчній конференції «At the End of the Year 2023» (Київ, 26-27 грудня, 2023 р.);
- Міжнародній конференції, присвяченій 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.);
- 15-тій українській алгебраїчній конференції «The 15th Ukraine Algebra Conference» (Львів, 8–12 липня 2025 р.);
- звітних науково-практичних конференціях Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковано в 8 працях, серед яких 1 у фаховому виданні із фізико-математичних наук [1]; 2 – у виданнях, включених до наукометричної бази Scopus [41], [43]; решта 5 – у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій [2], [3], [42], [40], [44].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації – 114 сторінок. Список використаних джерел містить 49 найменувань, значна частина з яких іноземною мовою. Дисертація містить 5 додатків.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, встановлено зв'язок роботи з науковими темами. Сформульовано мету та завдання дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів. Подано список публікацій та інформацію про апробації результатів дисертаційної роботи.

У **першому розділі** «Огляд літератури, вибір методів дослідже-

ння та допоміжні результати» наведено огляд літератури за тематикою дисертаційного дослідження, здійснено вибір методів дослідження та наведено допоміжні результати.

У цьому розділі проведено комплексний теоретико-методологічний аналіз стану сучасних досліджень у галузі моментної інваріантності та методів представлення цифрових сигналів за допомогою поліноміальних базисів.

У підрозділі **1.1 «Загальні відомості про моментні інваріанти та квазі-мономіальні базиси»** простежено генезис розвитку теорії моментних інваріантів. Розглянуто класичний підхід М.-К. Ху (Hu M.-K.) до побудови інваріантів у базисі геометричних мономів $\{x^m y^n\}$ та проаналізовано його подальший розвиток у працях Я. Флюссера та Т. Сака (Flusser J., Suk T.). Встановлено, що ключовим стимулом цього переходу стала потреба у подоланні критичної чисельної нестабільності, високої інформаційної корельованості та чутливості до шумів, які притаманні неортогональним базисам при обробці зображень високих порядків.

Обґрунтовано необхідність переходу до ортогональних базисів (Лежандра, Чебишева, Гаусса-Ерміта), що дозволяють мінімізувати середньоквадратичну похибку реконструкції сигналу. Проте зауважено, що такий перехід створює складну математичну проблему узгодження ортогональності з алгебраїчною формою інваріантів. Аналіз праць М. Павлака (Pawlak M.) та Я. Флюссера (Flusser J.) дозволив констатувати, що хоча ортогональні базиси забезпечують високу точність реконструкції об'єктів, вони суттєво ускладнюють аналітичну побудову геометричних інваріантів.

У підрозділі **1.2 «Поняття квазі-мономіальності та його еволюція»** досліджено концептуальний місток між теорією ортогональних многочленів та класичною теорією інваріантів.

Розглянуто та теоретично обґрунтовано концепцію квазі-мономіальних базисів як ефективного компромісу між обчислювальною стійкістю та

алгебраїчною простотою. Сформульовано математичне визначення квазі-мономіальності базису відносно групи перетворень G . Встановлено, що ключовою властивістю таких базисів є ідентичність матриць лінійних перетворень квазі-мономів та стандартних мономів. Проаналізовано еволюцію цього поняття на прикладі многочленів Гаусса-Ерміта.

У підрозділі **1.3 «Квазі-мономи в 3D: група $Aff(3)$ та підгрупи»** розглянуто специфіку поширення моментних методів на тривимірний простір.

У підрозділі висвітлено еволюцію поняття квазі-мономіальності від двовимірного до тривимірного випадку. Проаналізовано специфіку групи $SO(3)$, яка, на відміну від плоского випадку, характеризується неабелевістю, що створює додаткові виклики при побудові інваріантних дескрипторів.

Обґрунтовано вибір структур експоненціальних породжуючих функцій, що залежать від просторових інваріантів (скалярних добутків та норм векторів). Висвітлено переваги несепарабельних моментів у 3D-просторі для задач медичної візуалізації та аналізу воксельних даних, де критичною є інваріантність до довільних просторових орієнтацій об'єктів.

У підрозділі **1.4 «Методи дослідження та допоміжні інструменти»** деталізовано математичний інструментарій, використаний у роботі.

У розділі доведено фундаментальну роль математичного апарату алгебр Лі та інфінітезимальних операторів, які дозволяють звести задачу пошуку квазі-мономіальних сімей до розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Це забезпечує систематизацію базисів не через перебір функцій, а через аналіз структури генераторів відповідних груп перетворень.

Обґрунтовано пріоритетність методу експоненціальних породжуючих функцій (EGF) як універсального засобу аналітичного опису поліноміальних сімей. Встановлено, що експоненціальні породжувачі функції є найбільш

компактним та універсальним способом опису властивостей цілих сімейств поліномів. Визначено, що саме через структуру породжуючої функції можна встановити необхідні та достатні умови квазі-мономіальності базису, а також вивести ефективні рекурентні співвідношення для стабільного обчислення моментів.

Показано, що експоненціальні породжуючі функції дозволяють згорнути нескінченні рекурентні співвідношення у компактні функціональні форми, зручні для встановлення умов квазі-мономіальності. Розглянуто операторний підхід до виведення рекурентних формул, що забезпечують обчислювальну стабільність алгоритмів. Вказано, що рекурентний шлях обчислення моментів є єдиним способом уникнення експоненціального зростання похибок у практичних застосуваннях.

У підрозділі 1.5 «Узагальнення результатів аналізу» синтезовано отримані висновки та визначено перспективні напрями практичного впровадження.

Важливим результатом дослідження літературних джерел є виявлення сучасного тренду інтеграції моментних методів у архітектури інтелектуального аналізу даних. Розглянуто перспективність використання квазі-мономіальних моментів у структурі згорткових нейронних мереж (CNN) для забезпечення властивостей еківаріантності та інваріантності. Доведено, що такий підхід дозволяє математично закласти стійкість до геометричних спотворень на рівні архітектури мережі, що суттєво знижує обчислювальні витрати на аугментацію даних та підвищує надійність розпізнавання у складних умовах (аерофотознімки, медичні скани).

Узагальнення результатів аналізу літературних джерел та допоміжних математичних результатів підтвердило, що дослідження квазі-мономіальних сімей є актуальною науковою проблемою, яка знаходиться на перетині класичної теорії інваріантів та сучасних методів комп'ютерного зору. Отримані у

розділі теоретичні висновки щодо структури породжуючих функцій та операторних рівнянь створюють необхідне підґрунтя для подальшої розробки нових алгоритмів розпізнавання образів, стійких до широкого спектру афінних перетворень.

У другому розділі «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини» наведено визначення та основні результати щодо всіх сімей многочленів від двох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп афінної групи площини.

У підрозділі 2.1 «Формулювання задачі» надано тлумачення основним поняттям, що призводять до введення квазі-мономів.

Для розпізнавання та класифікації зображень за допомогою алгоритмів машинного навчання необхідно побудувати такі ознаки зображень, які залишаються інваріантними для тих геометричних перетворень площини, які не спотворюють сцену зображення. Для 2D зображень такими перетвореннями є обертання, паралельні перенесення, масштабування та композиція цих перетворень. Відповідні інваріантні ознаки називаються моментними інваріантами.

Залежно від вибору базису $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$ розглядаються різні системи моментів. У найпростішому випадку $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$ відповідні моменти називаються геометричними моментами. Афінна група площини $\text{Aff}(2)$ та її підгрупи природним чином діють на геометричні моменти і в результаті виникають відповідні алгебри моментних інваріантів. Особливий інтерес становлять моментні інваріанти відносно дії групи, яка є напівпрямим добутком групи перенесень площини $T(2)$ з прямим добутком комплексної групи обертань площини $SO(2)$ і групи рівномірних розтягів, яка ізоморфна групі \mathbb{R}^* .

Алгебра моментних інваріантів цієї групи добре вивчена: відомий явний опис її породжуючих елементів [5, 20]. Однак практичне використання

геометричних моментів викликає труднощі через їх чисельну нестабільність при роботі у дискретних областях, особливо для великих зображень, оскільки значення $x^m y^n$ швидко зростають із збільшенням розміру зображення. Щоб уникнути цієї проблеми, розглядають так звані ортогональні моменти, які породжуються базисом $\pi_{m,n}(x, y) = F_m(x)F_n(y)$, де $\{F_n(x)\}$ — сім'я ортогональних многочленів від однієї змінної. Але тоді виникає проблема знаходження виразів для моментних інваріантів у новому ортогональному базисі. Зміна базису пов'язана з великими технічними труднощами і позитивно вирішується лише для лежандрових моментів і лише для простих перетворень площини, які не включають обертання [13].

Вихід із цієї ситуації знайшли автори статті [49], які виявили несподіваний факт: виявляється, що для базису

$$\pi_{m,n}(x, y) = H_m(x)H_n(y),$$

де $\{H_n(x)\}$ — класичні многочлени Ерміта, форма моментних інваріантів відносно групи $SO(2)$ така ж, як і для геометричних моментів. Таким чином, ця властивість многочленів Ерміта дозволила ефективно обчислити $SO(2)$ -інваріантні ермітові ортогональні моменти.

У статті [6] ці ідеї були розвинені та надано повний опис усіх многочленів, які володіли цією властивістю. Ця властивість була названа квазі-мономіальною властивістю.

Введемо поняття квазі-мономіальності відносно довільної підгрупи афінної групи площини $\text{Aff}(2)$.

Нехай H — підгрупа афінної групи площини $\text{Aff}(2)$, яка розглядається з природною дією на векторному просторі многочленів двох змінних.

Означення 2.1.1.

Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається **квазі-мономіальною** відносно підгрупи H афінної групи $\text{Aff}(2)$ площини, якщо $\{B_{m,n}(x, y)\}$ утво-

рює такий базис векторного простору многочленів від двох змінних, що в цьому базисі лінійні оператори, якими діє H , мають таку саму матрицю, яку вони мають в стандартному мономіальному базисі $\{x^m y^n\}$. У цьому випадку многочлени $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називаються **квазі-мономами**.

У підрозділі **2.2 «Квазі-мономи відносно групи обертань площини»** наведено формулювання основних означень та теорем, які описують властивості квазі-мономів відносно групи обертань площини $SO(2)$.

Група $SO(2)$ діє на функції двох змінних поворотами T_θ :

$$T_\theta(f(x, y)) = f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Зокрема, T_θ діє на базисні вектори так:

$$\begin{aligned} T_\theta(x^m \cdot y^n) &= (x \cos \theta - y \sin \theta)^m \cdot (x \sin \theta + y \cos \theta)^n = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n}{k} (\cos \theta)^{m-j+k} (\sin \theta)^{n-k+j} x^{m+n-j-k} y^{j+k}. \end{aligned}$$

Нехай $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є іншим базисом у векторному просторі многочленів від двох змінних :

$$\deg_x B_{m,n}(x, y) = m, \quad \deg_y B_{m,n}(x, y) = n.$$

Нас цікавить такий базис, який перетворюється при обертанні T_θ так само, як і мономи $x^m y^n$.

Означення 2.2.1.

Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається **квазі-мономіальною відносно групи обертань площини $SO(2)$** , якщо має місце наступна тотожність:

$$\begin{aligned} T_\theta(B_{m,n}(x, y)) &= B_{m,n}(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n}{k} (\cos \theta)^{m-j+k} (\sin \theta)^{n-k+j} \times B_{m+n-j-k, j+k}(x, y), \end{aligned}$$

для всіх $m, n \in \mathbb{N}$.

Іншими словами, лінійний оператор T_θ у цих двох різних базисах $\{x^m y^n\}$ і $\{B_{m,n}(x, y)\}$ має однакові матриці.

Виявляється, що існує простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів, який формулюється через її експоненціальну породжуючу функцію.

Теорема 2.2.1.

Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

є квазі-мономіальною відносно групи обертань площини $SO(2)$ тоді і тільки тоді, коли G є функцією змінних $ux + vy$, $x^2 + y^2$ і $u^2 + v^2$:

$$G = G(ux + vy, x^2 + y^2, u^2 + v^2).$$

Квазі-мономіальні многочлени відносно $SO(2)$ також допускають опис на мові диференціальних рівнянь.

Теорема 2.2.2.

Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною відносно групи обертань площини, якщо вона задовольняє диференціальне рівняння в частинних похідних для всіх $m, n \in \mathbb{N}$:

$$x \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} = n B_{m+1, n-1}(x, y) - m B_{m-1, n+1}(x, y).$$

Також у цьому випадку експоненціальна породжуюча функція G для $\{B_{m,n}(x, y)\}$ задовольняє наступне диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$x \frac{\partial G}{\partial y} - y \frac{\partial G}{\partial x} = v \frac{\partial G}{\partial u} - u \frac{\partial G}{\partial v}.$$

У підрозділі **2.3 «Квазі-мономи відносно групи масштабувань площини»** дається опис квазі-мономів відносно групи масштабувань площини.

Двопараметрична група масштабувань площини діє на функцію таким чином:

$$T_{s,t}(f(x, y)) = f(sx, ty), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Означення 2.3.1. Сім'ю многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називають **квазі-мономіальною відносно групи масштабувань площини**, якщо дія групи збігається з дією групи на одночлени, тобто

$$T_{s,t}(B_{m,n}(x, y)) = s^m t^n B_{m,n}(x, y),$$

для всіх $s, t \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема представляє собою простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів в термінах її породжуючої функції.

Теорема 2.3.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

є квазі-мономіальною відносно групи масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією двох змінних xu та yv :

$$G = G(xu, yv).$$

У підрозділі 2.4 «**Квазі-мономи відносно групи рівномірних масштабувань площини**» дається схожий опис квазі-мономів щодо групи рівномірних масштабувань площини.

Розглядається група рівномірних масштабувань, тобто такі перетворення площини:

$$\begin{cases} x' = sx, \\ y' = sy, \end{cases}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.4.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є **квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань площини**, якщо

$$B_{m,n}(sx, sy) = s^{m+n} B_{m,n}(x, y).$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Повний опис таких многочленів у термінах їх експоненціальної породжуючої функції дає наступна теорема.

Теорема 2.4.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

є квазі-мономіальною щодо групи рівномірних масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних $\frac{y}{x}$, ux та vx :

$$G = G\left(\frac{y}{x}, ux, vx\right).$$

У підрозділі 2.5 «Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень площини» описано квазі-мономи щодо групи паралельних перенесень площини.

Зазначимо, що двопараметрична група перенесень площини утворюється перетвореннями виду:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

Група діє на функції наступним чином:

$$f(x', y') = f(x + a, y + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$(x + a)^m (y + b)^n = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^i y^j a^{m-i} b^{n-j},$$

тоді приходимо до такого означення.

Означення 2.5.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається *квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини*, якщо виконується наступна тотожність

$$B_{m,n}(x + a, y + b) = \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s} b^{n-k} B_{s,k}(x, y),$$

для всіх $a, b \in \mathbb{N}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема представляє простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 2.5.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:

$$G = C(u, v) e^{xu+yv},$$

де $C(u, v)$ — довільний степеневий ряд за змінними u, v .

Властивість квазі-мономіальності може бути втрачена, якщо многочлени нормалізувати, тобто помножити на якісь константи. Нормалізація часто використовується для обмеження допустимого діапазону значень многочлена в обчисленнях. Наступна теорема показує, який вид нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

Теорема 2.5.2. Нехай сім'я $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини $T(2)$. Сім'я многочленів $\{\tilde{B}_{m,n}(x, y)\}$, де

$$\tilde{B}_{m,n}(x, y) = \alpha_{m,n} B_{m,n}(x, y), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

є квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли кожен коефіцієнт $\alpha_{m,n}$ є довільною функцією φ на множині натуральних чисел, яка задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m+n) = \varphi(m+n-1),$$

для всіх $m, n \in \mathbb{N}$.

Зазначимо, що многочлени $B_{m,n}(x, y)$ задовольняють наступні рекурентні співвідношення.

Теорема 2.5.3. *Многочлени $B_{m,n}(x, y)$ задовольняють такі рекурентні співвідношення:*

$$B_{m+1,n}(x, y) = xB_{m,n}(x, y) + 2 \sum_{k=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil} \sum_{s=0}^{(m-1)/2} h_{s,k}^{(m,n)} B_{m-2s-1, n-2k}(x, y),$$

$$B_{m,n+1}(x, y) = yB_{m,n}(x, y) + 2 \sum_{k=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil} \sum_{s=0}^{(m-1)/2} h_{k,s}^{(n,m)} B_{m-2s, n-2k-1}(x, y),$$

де

$$h_{s,k}^{(m,n)} = (2s+1)!(2k)! \binom{m}{2s+1} \binom{n}{2k} \binom{s+k}{k}.$$

У підрозділі **2.6 «Квазі-мономи відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини»** дається схожий опис квазі-мономів щодо групи рівномірних паралельних перенесень площини.

Розглядають частковий випадок рівномірних паралельних перенесень площини:

$$T_a(x) = x + a, \quad T_a(y) = y + a,$$

де $a \in \mathbb{R}$.

Наведемо означення.

Означення 2.6.1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається квазі-мономіальною сім'єю відносно групи рівномірних паралель-*

них перенесень площини, якщо виконується наступна тотожність

$$B_{m,n}(x+a, y+a) = \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s+n-k} B_{s,k}(x, y),$$

для всіх $a \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Вірне наступне твердження.

Теорема 2.6.1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ буде квазі-мономіальною сім'єю відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:*

$$G = C(x - y, u, v)e^{xu+yv}$$

де C – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, u, v$.

У третьому розділі «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору» пропонується опис всіх сімей многочленів від трьох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп масштабувань та паралельних перенесень афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. Крім того, встановлено умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності.

У підрозділі **3.1 «Постановка задачі та основні визначення квазі-мономіальності в просторі»** розглянуто історичний розвиток основних понять, що привели до введення квазі-мономів.

У підрозділі **3.2 «Квазі-мономи відносно групи масштабувань простору»** дається опис квазі-мономів відносно групи масштабувань простору.

Значимо, що група масштабування простору є трипараметричною групою перетворень тривимірного простору, які масштабують координати точок незалежно за осями x, y та z відповідно до коефіцієнтів масштабування s, t та r . Масштабування може збільшувати або зменшувати фігури та відстані між точками, але зберігає відносні пропорції фігур.

Формула перетворень координат при масштабуванні у просторі може бути записана як:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

де (x, y, z) – координати початкової точки, (x', y', z') – координати точки після масштабування, а s, t та r – коефіцієнти масштабування вздовж відповідних осей ($s, t, r \in \mathbb{R}$).

Група масштабування простору діє операторами $T_{s,t,r}$ на функції таким чином:

$$T_{s,t,r}(f(x, y, z)) = f(sx, ty, rz), \quad s, t, r \in \mathbb{R}.$$

Зокрема, для мономів маємо:

$$T_{s,t,r}(x^m y^n z^k) = s^m t^n r^k x^m y^n z^k.$$

Нас цікавлять сім'ї многочленів, на які оператори групи $T_{s,t,r}$ діють аналогічним чином.

Означення 3.2.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається *квазі-мономіальною відносно групи масштабувань простору*, якщо дія групи на ці многочлени збігається з дією групи на мономи, тобто виконується тотожність:

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = s^m t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

для всіх $s, t, r \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема описує всі сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними відносно групи масштабувань простору в термінах породжуючої функції.

Теорема 3.2.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експо-

ненційною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи масштабувань простору тоді і тільки тоді, коли G є функцією від трьох змінних xu, yv і zw :

$$G = G(xu, yv, zw).$$

У підрозділі **3.3 «Квазі-мономи відносно групи рівномірних масштабувань простору»** дається опис квазі-моніомів щодо групи рівномірних масштабувань простору.

Розглядається частковий випадок групи *рівномірних* маштабувань простору, тобто таких перетворень простору:

$$\begin{cases} x' = sx, \\ y' = sy, \\ z' = sz, \end{cases}$$

де $s \in \mathbb{R}$.

Означення 3.3.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається *квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань простору*, якщо виконується тотожність:

$$B_{m,n,k}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z),$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає повний опис таких многочленів у термінах породжуючих функцій.

Теорема 3.3.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань простору тоді і тільки тоді коли G є функцією від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

У підрозділі **3.4 «Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору»** описано квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору.

Зазначимо, що трипараметрична група перенесень простору породжується паралельними перенесеннями такої форми:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c, \end{cases}$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ця група діє на функції операторами зсуву $T_{a,b,c}$ наступним чином:

$$T_{a,b,c}(f(x, y, z)) = f(x + a, y + b, z + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$(x + a)^m (y + b)^n (z + c)^k = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} x^i y^j z^l a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l},$$

то приходимо до такого означення

Означення 3.4.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається **квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору**, якщо виконується наступна тотожність:

$$\begin{aligned} B_{m,n,k}(x + a, y + b, z + c) = \\ = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \end{aligned}$$

для всіх $a, b, c \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 3.4.1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:*

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд за змінними u, v, w .

Властивість квазі-мономіальності може зникнути, якщо многочлени нормалізуються, тобто множаться на деякі константи. Нормалізація часто використовується для обмеження допустимого діапазону значень многочленів при обчисленнях. Наступна теорема встановлює, який тип нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

Теорема 3.4.2. *Нехай $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ – квазі-мономіальна сім'я відносно групи паралельних перенесень простору. Сім'я $\{\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)\}$, де*

$$\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k}B_{m,n,k}(x, y, z),$$

буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є функцією φ від однієї змінної $m + n + k$, яка задовольняє таке рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m + n + k) = \varphi(m + n + k - 1),$$

де $m, n, k \in \mathbb{N}$.

У підрозділі **3.5 «Квазі-мономи відносно групи рівномірних паралельних перенесень простору»** дається схожий опис квазі-мономів щодо групи рівномірних паралельних перенесень простору.

Зокрема, для часткового випадку рівномірних паралельних перенесень простору $T_{a,a,a} = T_a$:

$$T_a(x) = x + a, \quad T_a(y) = y + a, \quad T_a(z) = z + a,$$

де $a \in \mathbb{R}$, справедливе наступне твердження.

Означення 3.5.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається *квазі-номіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень простору*, якщо виконується наступна тотожність:

$$\begin{aligned} & B_{m,n,k}(x + a, y + a, z + a)(x, y, z) = \\ & = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m+n+k-i-j-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \end{aligned}$$

для всіх $a \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає простий критерій квазі-номіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 3.5.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ буде квазі-номіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:

$$C(x - y, x - z, u, v, w) e^{xu + yv + zw},$$

де $C(x - y, x - z, u, v, w)$ – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, x - z, u, v, w$.

У четвертому розділі «SO(3)-квазі-номіальні сім'ї» пропонується опис, подібний до 2D випадку, сім'ї многочленів, яка є квазі-номіальною відносно групи обертань простору $SO(3)$. Доведено, що сім'я многочленів буде квазі-номіальною тоді і тільки тоді, коли експоненціальна породжуюча функція цієї сім'ї є функцією трьох змінних $ux + vy + wz, x^2 +$

$y^2 + z^2$, $u^2 + v^2 + w^2$. Крім того, встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає квазі-мономіальну властивість. Також в цьому розділі доводиться, що біортогональні поліноми Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами $SO(3)$ та наводяться для них рекурентні співвідношення.

У підрозділі **4.1 «Аналіз $SO(3)$ -інваріантності та застосування біортогональних многочленів Аппеля»** подано історичний огляд формування основних математичних понять, що призводять до введення квазі-мономів.

У підрозділі **4.2 « $SO(3)$ -квазі-мономи»** описано квазі-мономи відносно тривимірної групи обертань. Зазначимо, що тривимірна група обертань $SO(3)$ (спеціальна ортогональна група) — це група всіх обертань навколо початку координат тривимірного евклідового простору. Це трипараметрична група з наступною матричною реалізацією:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

де параметри $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$ є *кутами Ейлера*.

Поворот $T_{\alpha,\beta,\gamma} = T_\alpha T_\beta T_\gamma$ відображає точку (x, y, z) у нову точку (x', y', z') :

$$\begin{aligned}
x' &= (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma)x + \\
&\quad + (-\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)y + \sin \alpha \sin \beta z, \\
y' &= (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma)x + \\
&\quad + (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma)y - \cos \alpha \sin \beta z, \\
z' &= \sin \beta \sin \gamma x + \sin \beta \cos \gamma y + \cos \beta z.
\end{aligned}$$

З ортогональності групи випливає, що перетворення групи зберігають довжини векторів, тобто, справджується наступна тотожність:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Одночлени $x^m y^n z^k$ перетворюються при обертанні як

$$\begin{aligned}
&T_{\alpha, \beta, \gamma}(x^m \cdot y^n \cdot z^k) = \\
&\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) x^{m_1+n_1+k_1} y^{m_2+n_2+k_2} z^{m_3+n_3+k_3},
\end{aligned}$$

де $C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3)$ — деякий вираз.

Нас цікавлять многочлени, які перетворюються при обертанні $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ так само, як перетворюються мономи $x^m y^n z^k$. Це приводить до наступного означення.

Означення 4.2.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається *квазі-мономіальною відносно групи обертань простору $SO(3)$* , якщо виконується тотожність:

$$\begin{aligned}
&T_{\alpha, \beta, \gamma}(B_{m,n,k}(x, y, z)) = \\
&= \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) B_{m_1+n_1+k_1, m_2+n_2+k_2, m_3+n_3+k_3},
\end{aligned}$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що коефіцієнти $C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3)$ такі самі, як і коефіцієнти у виразі для $T_{\alpha, \beta, \gamma}(x^m \cdot y^n \cdot z^k)$.

Наступна теорема представляє простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів через експоненціальну породжуючу функцію.

Теорема 4.2.1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією*

$$G = G(x, y, z, u, v, w) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} \frac{w^k}{k!},$$

є квазі-мономіальною відносно групи обертань $SO(3)$ тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних $ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2$ і $u^2 + v^2 + w^2$:

$$G = G(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2).$$

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 4.2.1.

Сім'я $H_{m,n,k}(x, y, z) = H_m(x)H_n(y)H_k(z)$, де $H_n(x)$ — многочлени Ерміта, є квазі-мономіальною.

Дійсно, оскільки експоненціальні породжуючі функції многочленів Ерміта від x, y , та z мають вигляд

$$e^{2xu-u^2} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) \frac{u^m}{m!}, \quad e^{2yv-v^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) \frac{v^n}{n!}, \quad e^{2zw-w^2} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(z) \frac{w^k}{k!},$$

то експоненціальна породжуюча функція для $H_{m,n,k}(x, y, z)$ має форму:

$$e^{2xu-u^2} e^{2yv-v^2} e^{2zw-w^2} = e^{2(xu+yv+zw)-(u^2+v^2+w^2)}.$$

А тоді, згідно з теоремою 4.2.1, сім'я $H_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономіальною.

Властивість квазі-мономіальності потенційно може зникнути, якщо многочлени підлягають мультиплікативному постійному масштабуванню (нормалізації), що є звичайною практикою для підтримки діапазону значень

у розумних межах. Наступна теорема досліджує типи нормалізації, які підтримують властивість квазі-мономіальності.

Теорема 4.2.2. *Припустимо, що сім'я $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною. Сім'я многочленів $\{\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)\}$ така, що*

$$\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} B_{m,n,k}(x, y, z), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

буде квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є довільною функцією однієї змінної $m + n + k$:

$$\alpha_{m,n,k} = \varphi(m + n + k),$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

У підрозділі **4.3 «Многочлени Аппеля від трьох змінних»** розглянуто два приклади квазі-мономіальних сімей многочленів – многочленів Аппеля.

Розгляються дві сім'ї многочленів Аппеля $\{V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)\}$ і $\{U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)\}$, які визначені експоненціальними породжуючими функціями:

$$\frac{1}{(1 - 2(xu + yv + zw) + u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{2+s}{2}}} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} \frac{w^k}{k!},$$

$$\frac{1}{((1 - (ux + vy + wz))^2 - (u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1))^{\frac{s}{2}}} =$$

$$= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} \frac{w^k}{k!}.$$

Відповідно до теореми 4.2.1. ці сім'ї многочленів є квазі-мономіальними.

Для них відомі явні вирази:

$$V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{t} \frac{(1 + \frac{s}{2})_{m+n+k-i-j-t} (i-m)_i (j-n)_j (t-k)_t}{2^{2(i+j+t)-(m+n+k)}} \times \\ \times x^{m-2i} y^{n-2j} z^{k-2t},$$

$$U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) = \\ = (2s-1)_{m+n+k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{i+j+t} (-m)_{2i} (-n)_{2j} (-k)_{2t}}{2^{2(i+j+t)} i! j! t! (s)_{i+j+t}} \times \\ \times x^{m-2i} y^{n-2j} z^{k-2t} (1-x^2-y^2-z^2)^{i+j+t}.$$

Тут $(x)_n$ — символ Похгаммера:

$$(x)_n = \begin{cases} 1, n = 0, \\ x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1), n > 0. \end{cases}$$

Нижче наведено деякі перші такі многочлени для випадку $s = 1$:

$$V_{0,0,0} = 1, \quad V_{1,0,0} = 3x, \quad V_{0,1,0} = 3y, \quad V_{0,0,1} = 3z,$$

$$V_{2,0,0} = 15x^2 - 3, \quad V_{0,2,0} = 15y^2 - 3,$$

$$V_{1,1,0} = 15xy, \quad V_{1,0,1} = 15xz, \quad V_{0,1,1} = 15yz,$$

$$V_{3,0,0} = 105x^3 - 45x, \quad V_{2,1,0} = 105x^2y - 15y.$$

$$U_{0,0,0} = 1, \quad U_{1,0,0} = x, \quad U_{0,1,0} = y, \quad U_{0,0,1} = z,$$

$$U_{2,0,0} = 3x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad U_{0,0,2} = x^2 + y^2 + 3z^2 - 1,$$

$$U_{1,1,0} = 2xy, \quad U_{1,0,1} = 2xz, \quad U_{0,1,1} = 2yz,$$

$$U_{3,0,0} = 15x^3 + 9xy^2 + 9xz^2 - 9x, \quad U_{2,1,0} = 9x^2y + 3y^3 + 3yz^2 - 3y.$$

Многочлени Аппеля є біортогональними на сфері B^3 з ваговою функці-

$$w_s(x, y, z) = (1 - (x^2 + y^2 + z^2))^{\frac{s-1}{2}}.$$

Зокрема, для $s = 1$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} V_{m,n,k}(x, y, z) U_{m',n',k'}(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \frac{4\pi(m+n+k)! m!n!k!}{2(m+n+k)+3} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{k,k'}. \end{aligned}$$

Під час чисельного обчислення многочленів Аппеля за допомогою явних формул можемо зіткнутися з втратою точності через переповнення чи недоповнення числа з плаваючою комою. Для многочленів Аппеля ці рекурентні співвідношення можна використовувати для забезпечення ефективних і стабільних обчислень. В роботі виведено явні рекурентні співвідношення для многочленів Аппеля.

У наступних двох теоремах представлені рекурентні співвідношення для многочленів Аппеля, які можуть бути використані для їх ефективного та стабільного обчислення.

Теорема 4.3.1. *Многочлени $\{U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)\}$ задовольняють наступні рекурентні співвідношення з початковими умовами $U_{0,0,0} = 1$, $U_{m,n,k} = 0$, якщо хоча б один з індексів від'ємний:*

$$\begin{aligned} U_{m+1,n,k} &= x(2m+n+k+1)U_{m,n,k} + \\ &+ kmxzU_{m,n,k-1} + mnxyU_{m,n-1,k} + 2kmnxyzU_{m,n-1,k-1} + \\ &+ m((y^2+z^2-1)m + (y^2+2z^2-1)k + (2y^2+z^2-1)n)U_{m-1,n,k} + \\ &+ mkz((y^2-1)(m+k-1) + (3y^2-1)n)U_{m-1,n,k-1} + \\ &+ mny((3z^2-1)k + (z^2-1)(m+n-1))U_{m-1,n-1,k} - \\ &- 2kmnyz(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{m,n+1,k} = & y(m+2n+k+1)U_{m,n,k} + knyzU_{m,n,k-1} + \\
& + mnxyU_{m-1,n,k} + 2kmnxyzU_{m-1,n,k-1} + \\
& + n((x^2+z^2-1)n + (x^2+2z^2-1)k + (2x^2+z^2-1)m)U_{m,n-1,k} + \\
& + nkz((x^2-1)(k+n-1) + (3x^2-1)m)U_{m,n-1,k-1} + \\
& + mnx((3z^2-1)k + (z^2-1)(m+n-1))U_{m-1,n-1,k} - \\
& - 2kmnxz(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{m,n,k+1} = & z(m+n+2k+1)U_{m,n,k} + kmxzU_{m-1,n,k} + \\
& + knzyU_{m,n-1,k} + 2kmnxyzU_{m-1,n-1,k} + \\
& + k((x^2+y^2-1)k + (2x^2+y^2-1)m + (x^2+2y^2-1)n)U_{m,n,k-1} + \\
& + mkx((y^2-1)(m+k-1) + (3y^2-1)n)U_{m-1,n,k-1} + \\
& + kny((x^2-1)(k+n-1) + (3x^2-1)m)U_{m,n-1,k-1} - \\
& - 2ktnyx(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1},
\end{aligned}$$

Нижче наведено рекурентні співвідношення для многочленів $V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)$.

Теорема 4.3.2. *Многочлени $V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)$ задовольняють п'ятичленні рекурентні співвідношення:*

$$\begin{aligned}
& (2(1+m+n+k) + s)xV_{m,n,k}(x, y, z) = \\
& = V_{m+1,n,k}(x, y, z) - n(n-1)V_{m+1,n-2,k}(x, y, z) - \\
& - k(k-1)V_{m+1,n,k-2}(x, y, z) + m(m+2n+2k+1+s)V_{m-1,n,k}(x, y, z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2(1+m+n+k) + s)yV_{m,n,k}(x, y, z) = \\
& = V_{m,n+1,k}(x, y, z) - m(m-1)V_{m-2,n+1,k}(x, y, z) - \\
& - k(k-1)V_{m,n+1,k-2}(x, y, z) + n(n+2m+2k+1+s)V_{m,n-1,k}(x, y, z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2(1+m+n+k) + s)zV_{m,n,k}(x, y, z) = \\
& = V_{m,n,k+1}(x, y, z) - m(m-1)V_{m-2,n,k+1}(x, y, z) - \\
& - n(n-1)V_{m,n-2,k+1}(x, y, z) + k(k+2m+2n+1+s)V_{m,n,k-1}(x, y, z),
\end{aligned}$$

з початковими умовами:

$$V_{0,0,0}(x, y, z) = 1, \quad V_{1,0,0}(x, y, z) = (s+2)x, \quad V_{0,1,0}(x, y, z) = (s+2)y,$$

$$V_{2,0,0}(x, y, z) = (s+2)(x^2s + 4x^2 - 1), \quad V_{1,1,0}(x, y, z) = xy(s+4)(s+2).$$

Авторка щиро вдячна науковим керівникам – Бедратюку Леоніду Петровичу та Кравців Вікторії Василівні – за цінні поради, підтримку та неоціненну допомогу у написанні дисертації.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ, ВИБІР МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ДОПОМІЖНІ РЕЗУЛЬТАТИ

1.1. Загальні відомості про моментні інваріанти та квазі-мономіальні базиси

Аналіз зображень (2D та 3D) шляхом обчислення моментів та побудови моментних інваріантів є одним із центральних інструментів у теорії розпізнавання образів. Історично цей напрям бере початок від класичних геометричних моментів $M_{m,n}$, які для неперервної функції яскравості зображення $f(x, y)$ визначаються як:

$$M_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n f(x, y) dx dy. \quad (1.1)$$

Ці величини у базисі мономів $\{x^m y^n\}$ були вперше запропоновані М. Ху (М.-К. Hu) [25], який використав теорію алгебраїчних інваріантів для побудови системи із семи відомих інваріантів (це інваріанти другого та третього порядків, які базуються на центральних моментах для забезпечення інваріантності до зсуву), що не змінюються при паралельному перенесенні, масштабуванні та обертанні. Цей підхід став основою для багатьох прикладних систем технічного зору та знайшов ґрунтовний розвиток у працях Дж. Флуссера (Flusser) та Т. Сака (Suk) [19], де було розширено систему інваріантів до складніших геометричних трансформацій, включаючи афінні та проєктивні спотворення.

Попри концептуальну простоту та елегантність, геометричні моменти мають суттєві обмеження, що проявляються при переході до практичних обчислень. Як детально проаналізовано у працях М. Павлака (Pawlak M.) [39] та Г. Папакостаса (Papakostas G. A.) [38], чисельна нестабільність обчислювальних схем стає критичною вже при досягненні 10-15 порядку моментів.

Основними дестабілізуючими факторами є:

– **Висока корельованість базису:** оскільки мономи $\{x^m y^n\}$ не є ортогональними на типових областях визначення зображення (прямокутник або коло), вони містять значну надмірну інформацію. Це призводить до того, що для представлення складних деталей об'єкта потрібна величезна кількість моментів, які важко обробити без похибок.

– **Динамічний експоненціальний діапазон:** при великих значеннях m, n значення $\{x^m y^n\}$ зростають експоненціально, що спричиняє величезні похибки заокруглення при обчисленнях у дискретних областях пікселів або вокселів, які нівелюють корисний сигнал, особливо у дискретних представленнях (пікселі або вокселі).

– **Чутливість до шуму:** геометричні моменти високих порядків надмірно чутливі до змін на периферії (концентруються на периферії зображення), ігноруючи центральну частину, що робить їх вразливими до крайових шумів.

Тому дослідники почали шукати базиси для моментів, які дозволяють покращити обчислювальну стійкість. Для подолання цих труднощів дослідники звернулися до ортогональних базисів. Було запропоновано моменти Лежандра [13], Чебишева [36] та Гаусса-Ерміта [49]. Ортогональність базисних функцій $\phi_{m,n}(x, y)$ забезпечує мінімальну середньоквадратичну похибку при реконструкції зображення:

$$f(x, y) \approx \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^M \lambda_{m,n} \phi_{m,n}(x, y). \quad (1.2)$$

Ортогональні моменти дозволяють значно точніше відновлювати зображення за обмеженим набором моментів. Однак, перехід до ортогональних базисів створив нову математичну проблему: складність побудови інваріантів. Якщо для геометричних моментів інваріанти будуються як многочлени від моментів, то для многочленів Лежандра чи Чебишева вирази інваріантів

стають громіздкими або взагалі не мають замкненої форми.

Крім того, при такому переході виникла нова проблема: як виражати інваріанти у нових базисах? У деяких часткових випадках (наприклад, для моментів Лежандра без урахування поворотів [13]) розв'язання було знайдене, але загального підходу не було запропоновано.

Саме ці протиріччя – між обчислювальною стабільністю ортогональних многочленів та алгебраїчною простотою мономів — зумовили появу концепції квазі-мономіальних базисів. Основна ідея полягає у пошуку таких поліноміальних сімей, які «імітують» поведінку мономів $\{x^m y^n\}$ під дією певних груп перетворень G . Це відкриває шлях до використання класичних інваріантів Ху (Hu M.-K.), Флюссера (Flusser J.) та Сука (Suk T.), але з використанням чисельно стабільних моментів, обчислених у нових базисах.

Окремим перспективним напрямом, що виник в останнє десятиліття, є поєднання моментних методів із глибоким навчанням. В роботах Сіфре та Маллата (Sifre L., Mallat S.) [45–47], а також у дослідженнях Бруни (Bruna J.) [8], показано, що впровадження моментних інваріантів у архітектуру згорткових нейронних мереж (CNN) дозволяє будувати мережі, які є апріорі інваріантними до певної групи перетворень.

Зокрема, використання моментів на етапі пулінгу або як додаткових ознак дозволяє:

1. Радикально зменшити потребу в аугментації даних (штучному множенні вибірки через повороти та зсуви), оскільки мережа «розуміє» ці перетворення на рівні математичної структури.
2. Скоротити кількість параметрів мережі, оскільки інваріантність закладається математично, а не вивчається через перебір варіантів, що запобігає перенавчанню та прискорює процес збіжності алгоритмів навчання.
3. Підвищити точність розпізнавання об'єктів у аерофотознімках, напри-

клад, дистанційне зондування Землі [9, 10], медичних зображеннях [7, 12], де орієнтація об'єктів (клітин, будівель, суден) є випадковою та непередбачуваною.

1.2. Поняття квазі-мономіальності та його еволюція

Поняття квазі-мономіальності виникло як відповідь на потребу уніфікації теорії інваріантів. Ключовий прорив відбувся у роботах [49] та [6], де було виявлено унікальну властивість многочленів Гаусса-Ерміта:

$$H_{m,n}(x, y) = e^{-x^2-y^2} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} e^{x^2+y^2}.$$

Виявилось, що при обертанні системи координат ці многочлени трансформуються лінійно за тими ж законами, що й мономи. Причому матриця цієї трансформації ідентична матриці повороту для звичайних степенів $x^m y^n$. Тобто матриця оператора повороту в базисі $\{H_m(x)H_n(y)\}$ має ту саму матрицю, як і стандартні степеневі базиси $\{x^m y^n\}$. Це означає, що оператор повороту діє на ці дві різні системи функцій ідентично. Це спонукало до введення поняття квазі-мономіальності.

Формальне визначення: Система многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається *квазі-мономіальною відносно групи перетворень G* , якщо для будь-якого елемента $g \in G$ дія відповідного оператора T_g матрицею, тотожною матриці трансформації у стандартному базисі мономів $\{x^m y^n\}$.

Математично, якщо трансформація змінних має вигляд

$$x' = Ax + b_x, \quad y' = Ay + b_y,$$

то для квазі-мономів виконується структурна тотожність:

$$B_{m,n}(g(x, y)) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n C_{m,n}^{j,k}(g) B_{j,k}(x, y), \quad (1.3)$$

де вагові коефіцієнти $C_{m,n}^{j,k}(g)$ є тими самими, що й у розкладі $(x')^m (y')^n$.

Це означає, що алгебраїчні інваріанти, побудовані для геометричних моментів, залишаються інваріантними і для моментів, обчислених у квазі-мономіальному базисі. Ця властивість є надзвичайно потужною, оскільки вона дозволяє переносити будь-який відомий інваріант геометричних моментів (наприклад, інваріанти Ху) на новий базис шляхом простої заміни геометричних моментів на моменти у квазі-мономіальному базисі.

У роботі [6] було наведено повний опис сімей многочленів, квазі-мономіальних відносно групи обертань $SO(2)$. Було доведено, що необхідною і достатньою умовою є спеціальний вигляд їхньої експоненціальної породжуючої функції. Вона повинна залежати від специфічних інваріантних комбінацій змінних, що пов'язано з класичними роботами Ерміта [23] та Аппеля [4] щодо ортогональних поліномів від багатьох змінних. Зокрема, було доведено, що будь-яка система квазі-мономіальних многочленів має експоненціальну породжуючу функцію, яка залежить тільки від трьох змінних $(ux + vy, x^2 + y^2, u^2 + v^2)$:

$$G(x, y, u, v) = A(u^2 + v^2)e^{ux+vy+C(u^2+v^2)(x^2+y^2)}. \quad (1.4)$$

Важливим методичним інструментом став апарат алгебр Лі, запропонований в [5]. Він дозволив перейти від аналізу скінченних перетворень до аналізу інфінітезимальних операторів (операторів групи). Якщо L — генератор групи (наприклад, оператор повороту $L = x\partial_y - y\partial_x$), то умова квазі-мономіальності зводиться до диференціального рівняння:

$$L(B_{m,n}) = mB_{m-1,n+1} - nB_{m+1,n-1}. \quad (1.5)$$

Це значно спростило пошук нових сімей, оскільки перевірка умови звелася до розв'язання систем диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку, методи розв'язання яких добре відомі в класичній теорії [27].

1.3. Квазі-мономи в 3D: група $\text{Aff}(3)$ та підгрупи

Аналіз 3D-зображень (воксельних даних) потребує значно складнішого математичного апарату, зокрема потребує інваріантності не лише до паралельних перенесень і масштабувань, а й до поворотів в просторі. У 3D група обертань $SO(3)$ є неабелевою, що ускладнює структуру інваріантів. Це має практичне значення для задач біомедичної візуалізації (КТ, МРТ), розпізнавання 3D-об'єктів, комп'ютерної томографії тощо [19]. У роботі [21] розглянуто приклади, коли такі інваріанти дозволяють ефективно узагальнювати класичні методи розпізнавання образів на 3D-випадок, зокрема за рахунок застосування біртогональних многочленів Аппеля від змінних. Проте у роботах [19] та [21] показано, що для 3D розпізнавання (наприклад, у комп'ютерній томографії) класичні методи часто виявляються недостатніми.

Аналогічно 2D-випадку, сім'я $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною відносно обертань у просторі $SO(3)$, якщо дії операторів повороту у базисах $\{x^m y^n z^k\}$ та $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ мають тотожні матриці. За результатами, наведеними в останніх дослідженнях, зокрема в [21], а також у статтях, що описують узагальнення з 2D на 3D, ця властивість визначає залежність експоненціальної породжуючої функції від обмеженого набору «інваріантних» змінних $(ux + vy + wz)$, $(x^2 + y^2 + z^2)$ та $(u^2 + v^2 + w^2)$, тобто якщо її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:

$$G(x, y, z, u, v, w) = \Phi(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2). \quad (1.6)$$

Важливим внеском у цей напрям є праці [29, 30], де розглядаються несепарабельні моменти в 3D. Вони дозволяють будувати дескриптори 3D-об'єктів, стійкі до анізотропних масштабувань та поворотів, що є ключовим для ідентифікації біологічних структур, які можуть змінювати форму та орієнтацію одночасно.

Знаходження квазі-мономіальних сімей для підгруп групи $\text{Aff}(3)$ до-

зволяє сформувати стійкі обчислювальні схеми для розрахунку моментних інваріантів без складних перетворень базису. Ці результати дозволяють будувати ознаки для 3D об'єктів, які є стійкими не лише до поворотів, а й до неоднорідних масштабувань, що критично для біомедичної візуалізації.

1.4. Методи дослідження та допоміжні інструменти

Операторний метод та генератори груп. У рамках цієї роботи для вивчення властивостей квазі-мономіальних сімей многочленів відносно неперервних підгруп афінних груп було використано ідею перенесення дії групи на рівень її алгебри Лі, реалізованої у вигляді диференціальних операторів.

Для будь-якої однопараметричної підгрупи $g(\theta)$ вводиться лінійний диференціальний оператор:

$$\hat{L} = \left. \frac{d}{d\theta} T_{g(\theta)} \right|_{\theta=0}. \quad (1.7)$$

Наприклад, для групи масштабувань $x \rightarrow e^a x, y \rightarrow e^a y$, відповідний генератор має вигляд $\hat{L} = x\partial_x + y\partial_y$. Вимога квазі-мономіальності еквівалентна тому, що $\hat{L}(B_{m,n}) = (m+n)B_{m,n}$. Це дозволяє систематично класифікувати всі можливі базиси через розв'язок відповідних рівнянь.

Якщо група містить однопараметричні підгрупи, то кожна з них породжує в алгебрі Лі диференціальний оператор першого порядку (так званий генератор), що відображає локальну дію цієї підгрупи. Сукупність усіх таких генераторів визначає повну систему лінійних диференціальних рівнянь, яким мають задовольняти многочлени, щоб зберігати «той самий вигляд» під час дії групи.

З практичного погляду цей підхід виглядає так:

1. На рівні групи $\text{Aff}(2)$ або $\text{Aff}(3)$ розглядають неперервну підгрупу (наприклад, поворотів, масштабувань, зсувів тощо).

2. Для кожного однопараметричного підгрупового елемента (наприклад, обертання на кут θ , зсув на величину a тощо) знаходять відповідний диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial \theta}$, $\frac{\partial}{\partial a}$ тощо, що описує інфінітезимальну дію групи на просторі поліномів.

3. Вимога, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ (або $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ у 3D) перетворюється «так само, як і степеневі мономи $\{x^m y^n\} / \{x^m y^n z^k\}$ » під дією всієї групи, еквівалентна системі диференціальних рівнянь, утвореній цими операторами.

Саме такий підхід дає змогу записати критерій квазі-мономіальності у зручній формі. Зокрема, в дослідженнях для групи $SO(2)$, $SO(3)$, а також для різних підгруп $Aff(2)$ і $Aff(3)$ були виписані відповідні диференціальні оператори, що генерують дію поворотів, зсувів і масштабувань. Далі аналіз розв'язків системи диференціальних рівнянь дозволяє визначити:

- з яких саме змінних може залежати експоненціальна породжувальна функція сім'ї квазі-мономів,

- які умови (у вигляді співвідношень у породжуючій функції або у вигляді диференціальних рівнянь) мають бути задоволені, щоб базис $\{B_{m,n}\}$ чи $\{B_{m,n,k}\}$ залишався квазі-мономіальним.

Отримані в межах такого підходу диференціальні рівняння фактично переносять групову дію на умови для коефіцієнтів і породжуючих функцій. Завдяки цьому можна систематично описувати всі базиси, що узгоджено змінюються під дією групи (тобто є квазі-мономіальними), а також ефективно обчислювати відповідні моментні інваріанти. Це і дозволило сформулювати критерій квазі-мономіальності в алгебро-диференціальній формі: якщо експоненціальна породжуюча функція сім'ї многочленів задовольняє визначену систему диференціальних рівнянь, то дана сім'я буде (або не буде) квазі-мономіальною.

Залучення апарату алгебри Лі й диференціальних операторів дає єди-

ний підхід для дослідження дії різноманітних афінних та ортогональних груп на просторі многочленів і є фундаментальним методичним інструментом цієї роботи.

Роль експоненціальних породжуючих функцій. Продовжуючи опис методів, слід окремо підкреслити важливу роль експоненціальних породжуючих функцій у дослідженнях квазі-мономіальних сімей. У цьому підході вся сім'я многочленів описується єдиним аналітичним об'єктом, що дозволяє зручно формулювати та перевіряти умови квазі-мономіальності.

Експоненціальною породжуючою функцією (EGF) називається ряд:

$$G(x, u) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m(x) \frac{u^m}{m!}.$$

Нехай ми маємо систему многочленів

$$\{ B_{m,n}(x, y) \} \quad \text{або} \quad \{ B_{m,n,k}(x, y, z) \},$$

залежно від того, чи йдеться про дво- чи тривимірний випадок.

Експоненціальною породжуючою функцією для такої системи називається ряд:

$$G(x, y, [z]; u, v, [w]) = \sum_{m,n,[k]=0}^{\infty} B_{m,n,[k]}(x, y, [z]) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} \left[\frac{w^k}{k!} \right],$$

де квадратні дужки $[\cdot]$ вказують на можливу присутність третьої змінної z та відповідного параметра w . У двовимірному випадку – це $G(x, y; u, v)$, а в тривимірному – $G(x, y, z; u, v, w)$.

Основні переваги застосування методу породжуючих функцій:

1. **Компактність.** Вся нескінченна сім'я многочленів «пакується» в одну функцію.
2. **Перенесення властивостей.** Властивість квазі-мономіальності $B_{m,n}$ трансформується у функціональне рівняння для G .

3. **Зв'язок з класичними многочленами.** Багато відомих ортогональних систем (Ерміта, Лагерра, Аппеля [4]) природно описуються через експоненціальні породжуючі функції, що дозволяє легко перевіряти їхню квазі-мономіальність.
4. **Зручність у встановленні умов квазі-мономіальності.** Вимоги на $\{B_{m,n,[k]}\}$ (що випливають із системи диференціальних рівнянь, згаданих раніше) можуть бути перекладені на умови для G . Зокрема, залежність G лише від певних комбінацій змінних (наприклад, $ux + vy$, $x^2 + y^2$, $u^2 + v^2$ тощо) стає природним *критерієм* квазі-мономіальності.
5. **Алгебраїчна єдність опису.** Уся сім'я поліномів $\{B_{m,n,[k]}\}$ «пакується» в одну функцію G . Завдяки цьому багато рівнянь (особливо лінійних, пов'язаних із груповою дією) перетворюються на короткі алгебро-диференціальні умови, накладені на G .
6. **Комбінаторний аналіз.** Породжуючі функції дозволяють застосовувати комбінаторні прийоми — порівнювати коефіцієнти при $\frac{u^m v^n}{m! n!} [\frac{w^k}{k!}]$, вивчати підсумовування рядів тощо. Це дає змогу легко визначати явний вигляд многочленів, одержувати рекурентні формули та аналізувати стійкість обчислень у застосуваннях (розпізнавання образів, 3D-графіка тощо).

Як уже зазначалося вище, враховуючи групову дію (через відповідні диференціальні оператори) на G , можна отримати систему лінійних диференціальних рівнянь для G . Розв'язок такої системи часто унаочнює

$$G = G(ux + vy + [wz], x^2 + y^2 + [z^2], u^2 + v^2 + [w^2]),$$

або інші подібні залежності (залежно від конкретної групи перетворень). Простежується «збіг» дії групи на $x, y, [z]$ і на $u, v, [w]$, що й забезпечує ідентичність матриць (умову квазі-мономіальності) в базисах $\{x^m y^n [z^k]\}$ та $\{B_{m,n,[k]}\}$.

Експоненціальні породжуючі функції стали центральним засобом у комбінаторному вивченні квазі-мономіальних базисів і основою для виведення головних результатів цієї роботи, дозволяючи водночас формулювати й вирішувати задачі про пошук многочленів, стійких до певних групових перетворень.

Рекурентні співвідношення та обчислювальна стабільність.

Одним із практичних результатів дослідження експоненціальних породжуючих функцій є виведення рекурентних формул. Пряме обчислення поліномів через суми степенів призводить до втрати точності. Натомість рекурентні співвідношення вигляду:

$$B_{m+1,n} = (x + \alpha_m)B_{m,n} + \beta_m B_{m-1,n} + \dots \quad (1.8)$$

дозволяють обчислювати моменти високих порядків за лінійний час із мінімальною похибкою. Це критично для обробки зображень високої роздільної здатності.

Варто наголосити на важливості рекурентних формул для ефективного й надійного обчислення значень багатоіндексних многочленів, що використовуються під час оцінювання моментів зображень. У великих (2D або 3D) областях доводиться працювати з великою кількістю многочленів високих порядків, і пряме використання степеневих формул може призвести до критичних похибок через переповнення або втрату точності в операціях з плаваючою комою.

Рекурентні співвідношення істотно підвищують чисельну стабільність обчислень, оскільки дають змогу уникати повторного множення на x , y чи $[z]$ для кожного порядку. Замість цього многочлени вищих порядків визначаються через кілька базових арифметичних дій над уже відомими виразами з меншими індексами. Такий підхід не тільки економить обчислювальні ресурси, а й робить методи обчислення універсальним, оскільки рекурентні

формули можна адаптувати до різних типів базисів чи умов задачі.

Ключову роль у виведенні цих рекурентних співвідношень відіграють експоненціальні породжуючі функції. Аналізуючи алгебраїчні й диференціальні рівняння, яким задовольняє породжуюча функція при квазі-мономіальності, вдається виписати явні закономірності для переходів:

$$B_{m,n,[k]} \mapsto B_{m\pm 1,n,[k]}, \quad B_{m,n,[k]} \mapsto B_{m,n\pm 1,[k]}, \quad B_{m,n,[k]} \mapsto B_{m,n,[k\pm 1]},$$

що суттєво спрощує обчислення самих многочленів і, відповідно, моментів зображень. Це дає змогу проводити аналіз образів високої роздільності, уникаючи надмірних степеневих операцій і відповідних числових похибок.

Рекурентні співвідношення, знайдені саме завдяки породжуючим функціям, відкривають широкі можливості для швидкої і стабільної реалізації алгоритмів, заснованих на квазі-мономіальних поліномах. Це надзвичайно важливо для задач машинного навчання, комп'ютерного зору та тривимірного моделювання, де моментні інваріанти є одним із ключових інструментів.

1.5. Узагальнення результатів аналізу

Підсумовуючи огляд, можна стверджувати, що теорія квазі-мономіальних базисів пройшла шлях від вивчення окремих випадків (поліноми Ерміта) до загальної класифікації відносно підгруп афінних груп $\text{Aff}(2)$ та $\text{Aff}(3)$.

За останні десятиліття теорія моментних методів зробила помітний крок уперед. Якщо класичні геометричні моменти, запропоновані й досліджувані з середини минулого століття, забезпечували відносно просте означення та цілком успішно застосовувалися в задачах двовимірного розпізнавання, то з часом проблема числової нестабільності спонукала до пошуку стійкіших базисів. У результаті з'явилося поняття квазі-мономіальних базисів, які зберігають логіку побудови моментних інваріантів, але істотно виграють у

точності та стабільності.

Результати досліджень [6] та [49] сформували теоретичний фундамент для 2D випадку. Дослідження для групи $\text{Aff}(2)$ свідчать, що концепція квазі-мономів має доволі завершений та добре сформульований характер, про що свідчать результати [6] та [49]. А праці останніх років [21] та [31] відкрили шлях до 3D застосувань і стосуються поширення цих самих ідей на тривимірний простір, де головним об'єктом є група обертань $\text{SO}(3)$, а також інші підгрупи просторової афінної групи $\text{Aff}(3)$. Таким чином, теорія квазі-мономіальних базисів поступово стає ефективною методикою як для аналізу 2D-зображень, так і для складніших 3D-завдань.

Важливим трендом є поєднання цієї теорії з нейромережевими архітектурами, де квазі-мономи виступають як засіб забезпечення геометричної стабільності (еквіваріантності) шарів CNN [22, 30]. На відміну від суто архітектурних рішень для детектування орієнтованих об'єктів (наприклад, ROI Transformer [16], що вивчає трансформації через складні шари мережі), використання квазі-мономів дозволяє закласти геометричну стабільність безпосередньо у математичну структуру дескрипторів [22, 30]. Включення інваріантних моментів у архітектури CNN допомагає формувати ротаційно або афінно стійкі ознаки, зменшуючи потребу в аугментації та суттєво скорочуючи кількість параметрів. Сама ж теорія квазі-мономів гарантує збереження необхідних групових властивостей многочленів, що, у свою чергу, підсилює еквіваріантність чи інваріантність шарів нейронної мережі без надмірних обчислювальних витрат. Тож наступний етап еволюції моментних методів природно охоплює як класичні задачі аналізу зображень і розпізнавання, так і сфери глибокого навчання, де врахування групових симетрій стає дедалі важливішим.

Розвиток поняття квазі-мономів — від двовимірного до тривимірного випадку та його впровадження в архітектури глибоких мереж — підтвер-

джує, що сучасна теорія моментних інваріантів охоплює великий спектр застосувань, у тому числі обробку високорозмірних даних з мінімальними числовими похибками та високою інваріантністю до геометричних перетворень.

Таким чином, дослідження квазі-мономіальних сімей є актуальним науковим завданням, що об'єднує класичну алгебру, теорію диференціальних рівнянь та сучасні методи інтелектуального аналізу даних.

Результати першого розділу базуються на аналізі значної кількості наукових літературних джерел, включаючи класичні праці Ерміта, Аппеля та сучасні публікації у провідних журналах з розпізнавання образів (Pattern Recognition, IEEE TIP).

У першому розділі подано теоретичні передумови та висвітлено генезис квазі-мономіальних сімейств многочленів. Наведено аналіз літературних джерел та продемонстровано загальні відомості про моментні інваріанти та квазі-мономіальні базиси. Проведено ґрунтовний аналіз еволюції моментних методів: від перших інваріантів Ху до сучасних несепарабельних 3D-дескрипторів.

Введено поняття квазі-мономіальності та продемонстрована еволюція розвитку цього поняття. Описано розширення поняття квазі-мономіальності на 3D-випадак відносно групи $SO(3)$. Визначено, що саме квазі-мономіальність дозволяє поєднати переваги ортогональних систем (чисельна стабільність) із перевагами мономів (алгебраїчна простота інваріантів).

Обґрунтовано важливу роль апарату алгебр Лі та експоненціальних породжуючих функцій у дослідженні квазі-мономіальних сімей многочленів. Визначено переваги застосування породжуючих функцій: зручність у встановленні квазі-мономіальності, алгебраїчна єдність опису, використання комбінаторних прийомів.

Узагальнено отримані результати аналізу літературних джерел щодо

важливості та актуальності дослідження квазі-мономіальних сімей як єдиної методики для аналізу 2D та 3D-зображень. Окреслено сфери застосування квазі-мономів, зокрема інтеграцію квазі-мономіальних методів у сучасні системи комп'ютерного зору, зокрема для підвищення інваріантності нейронних мереж без надмірних обчислювальних витрат. Це закладає фундамент для подальших розділів дисертації, де ці методи будуть застосовані до конкретних класів перетворень.

РОЗДІЛ 2. КВАЗИ-МОНОМИ ВІДНОСНО ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ ПЛОЩИНИ

2.1. Формулювання задачі

Важливою сферою застосування теорії груп є аналіз 2D і 3D зображень. Для розпізнавання та класифікації зображень за допомогою алгоритмів машинного навчання необхідно побудувати такі ознаки зображень, які залишаються інваріантними для тих геометричних перетворень площини, які не спотворюють сцену зображення. Для 2D зображень такими перетвореннями є обертання, паралельні перенесення, масштабування та композиція цих перетворень. Відповідні інваріантні ознаки вперше були представлені в статті [25] і називаються *моментними інваріантами*. Зображення ототожнюється з кусково-неперервною дійсною функцією від двох змінних $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2$, що визначена на компактній області Ω і яка має скінченний ненульовий інтеграл. Тоді величина

$$\mathbf{m}_{m,n}(f(x, y)) = \mathbf{m}_{mn} = \iint_{\Omega} f(x, y) \pi_{m,n}(x, y) dx dy,$$

називається *π -моментом зображення порядку $m + n$* , де сім'я многочленів $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$ є базисом нескінченновимірному векторного \mathbb{R} -простору многочленів від двох змінних.

З 1960-х років моментні інваріанти активно використовуються в аналізі зображень [5–13, 17, 19–21, 25, 36–39].

Залежно від вибору базису $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$ розглядаються різні системи моментів. У найпростішому випадку $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$ відповідні моменти називаються *геометричними моментами*. Афінна група площини $\text{Aff}(2)$ та її підгрупи природним чином діють на геометричні моменти і в результаті

виникають відповідні *алгебри моментних інваріантів*. Особливий інтерес у застосуванні становлять моментні інваріанти відносно дії групи, яка є напівпрямим добутком групи паралельних перенесень площини $T(2)$ з прямим добутком комплексної групи обертань площини $SO(2)$ і групи рівномірних розтягів, яка ізоморфна групі \mathbb{R}^* .

Алгебра моментних інваріантів цієї групи добре вивчена, зокрема, відомий явний опис її породжуючих елементів [5, 20]. Однак практичне використання геометричних моментів викликає труднощі через їх чисельну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки значення $x^m y^n$ швидко зростають із збільшенням розміру зображення. Щоб уникнути цієї проблеми переходять до ортогональних моментів, які породжуються базисом

$$\pi_{m,n}(x, y) = F_m(x)F_n(y),$$

де $\{F_m(x)\}$ – сім'я ортогональних многочленів від однієї змінної. Основні причини використання ортогональних многочленів – це стабільна та швидка чисельна реалізація. Їх можна обчислювати за допомогою рекурентних співвідношень, які можуть бути ефективно реалізовані шляхом множення на спеціальні матриці. Використовуючи ортогональні многочлени, ми уникаємо високого динамічного діапазону значень моментів, що може призвести до втрати точності через переповнення або занадто малі значення (на відміну від стандартних степенів, значення ортогональних многочленів лежать у вузькому інтервалі, наприклад, $(-1; 1)$). Але виникає проблема знаходження виразів для моментних інваріантів у новому ортогональному базисі. Зміна базису пов'язана з великими технічними труднощами і позитивно вирішується лише для лежандрових моментів і лише для простих перетворень площини [13], які не включають обертання.

Принципово інший підхід було використано в статті [49]. Автори вияв-

ляють цікавий і несподіваний факт: виявляється, що для базису

$$\pi_{m,n}(x, y) = H_m(x)H_n(y),$$

де $\{H_n(x)\}$ — многочлени Ерміта, форма моментних інваріантів відносно групи $SO(2)$ така ж, як і для геометричних моментів. Це випливає з того, що матриця лінійного оператора T_θ повороту на кут θ в базисі $\{x^m y^n\}$ така сама (див. [49]), як і в базисі $\{H_m(x)H_n(y)\}$. Таким чином, ця чудова властивість многочленів Ерміта дозволила ефективно обчислити $SO(2)$ -інваріантні ермітові ортогональні моменти.

У статті [6] ці ідеї були розвинені та надано повний опис усіх сімей многочленів, які володіли цією властивістю відносно обертань площини у термінах їхніх породжуючих функцій. Ця властивість була названа *квазі-мономіальною* властивістю.

Наведемо деякі основні означення. Введемо поняття квазі-мономіальності відносно довільної підгрупи афінної групи площини $\text{Aff}(2)$.

Нехай H — підгрупа афінної групи площини $\text{Aff}(2)$, яка розглядається з природною дією на векторному просторі многочленів двох змінних.

Означення 2.1.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається *квазі-мономіальною* відносно підгрупи H афінної групи $\text{Aff}(2)$ площини, якщо $\{B_{m,n}(x, y)\}$ утворює такий базис векторного простору многочленів від двох змінних, що в цьому базисі лінійні оператори, якими діє H , мають таку саму матрицю, яку вони мають в стандартному мономіальному базисі $\{x^m y^n\}$. У цьому випадку многочлени $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називаються *квазі-мономами*.

Знання таких квазі-мономів щодо груп перетворень площини та простору є важливим для швидкого і стабільного розрахунку моментних інваріантів зображення.

Наведемо основні визначення та результати щодо квазі-мономів відносно підгруп афінної групи площини $\text{Aff}(2)$. Розглянемо критерій квазі-мономіальності для випадку, коли група H породжена обертаннями, масштабуваннями та паралельними перенесеннями площини в термінах експоненціальної породжуючої функції для сім'ї многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$.

2.2. Квазі-мономи відносно групи обертань площини

Група $SO(2)$ діє на функції двох змінних обертаннями T_θ :

$$T_\theta(f(x, y)) = f(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Зокрема, T_θ діє на базисні вектори так:

$$\begin{aligned} T_\theta(x^m \cdot y^n) &= (x \cos \theta - y \sin \theta)^m \cdot (x \sin \theta + y \cos \theta)^n = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n}{k} (\cos \theta)^{m-j+k} (\sin \theta)^{n-k+j} x^{m+n-j-k} y^{j+k}. \end{aligned}$$

Нехай $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є іншим базисом:

$$\deg_x B_{m,n}(x, y) = m, \quad \deg_y B_{m,n}(x, y) = n.$$

Нас цікавить такий базис, який перетворюється при обертанні T_θ так само, як і мономи $x^m y^n$.

Означення 2.2.1 ([6]). Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається **квазі-мономіальною відносно групи обертань площини $SO(2)$** , якщо має місце наступна тотожність:

$$\begin{aligned} T_\theta(B_{m,n}(x, y)) &= B_{m,n}(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = \\ &= \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n}{k} (\cos \theta)^{m-j+k} (\sin \theta)^{n-k+j} \times B_{m+n-j-k, j+k}(x, y), \end{aligned} \tag{2.1}$$

для всіх $m, n \in \mathbb{N}$.

Іншими словами, лінійний оператор T_θ у цих двох різних базисах $\{x^m y^n\}$ і $\{B_{m,n}(x, y)\}$ має однакові матриці.

Виявляється, що існує простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів, який формулюється через її експоненціальну породжуючу функцію

Теорема 2.2.1 ([6]). Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

є квазі-мономіальною відносно групи обертань площини $SO(2)$ тоді і тільки тоді, коли G є функцією змінних $ux + vy$, $x^2 + y^2$ і $u^2 + v^2$:

$$G = G(ux + vy, x^2 + y^2, u^2 + v^2). \quad (2.2)$$

Квазі-мономіальні многочлени відносно $SO(2)$ також допускають опис на мові диференціальних рівнянь.

Теорема 2.2.2 ([6]). Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною відносно групи обертань площини, якщо вона задовольняє диференціальне рівняння в частинних похідних для всіх $m, n \in \mathbb{N}$:

$$x \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} = n B_{m+1, n-1}(x, y) - m B_{m-1, n+1}(x, y).$$

Також у цьому випадку експоненціальна породжуюча функція G для $\{B_{m,n}(x, y)\}$ задовольняє наступне диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$x \frac{\partial G}{\partial y} - y \frac{\partial G}{\partial x} = v \frac{\partial G}{\partial u} - u \frac{\partial G}{\partial v}.$$

2.3. Квазі-мономи відносно групи масштабувань площини

У цьому підрозділі дається опис квазі-мономів відносно групи масштабувань площини.

Двопараметрична група масштабувань площини діє на функцію таким чином:

$$T_{s,t}(f(x,y)) = f(sx, ty), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Означення 2.3.1. Сім'ю многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ називають **квазі-мономіальною відносно групи масштабувань площини**, якщо дія групи збігається з дією групи на одночлени, тобто

$$B_{m,n}(sx, ty) = s^m t^n B_{m,n}(x, y), \quad (2.3)$$

для всіх $s, t \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема представляє собою простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів в термінах її породжуючої функції.

Теорема 2.3.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x,y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

є квазі-мономіальною відносно групи масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією двох змінних xu та yv :

$$G = G(xu, yv). \quad (2.4)$$

Доведення. \implies *Необхідність.* Припустимо, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ задовольняє умову (2.3). Спочатку доведемо, що многочлени $\{B_{m,n}(x,y)\}$ задовольняють таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial B_{m,n}(x,y)}{\partial x} = m B_{m,n}(x,y), \\ y \frac{\partial B_{m,n}(x,y)}{\partial y} = n B_{m,n}(x,y), \end{cases}$$

для всіх цілих індексів m, n .

Продиференціюємо тотожність (2.3) по s :

$$x \frac{\partial B_{m,n}(sx, ty)}{\partial x} = m s^{m-1} t^n B_{m,n}(x, y).$$

Поклавши $s = 1, t = 1$, отримаємо

$$x \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} = m B_{m,n}(x, y).$$

Аналогічно, диференціюванням по t отримуємо другу тотожність.

Беручи до уваги першу тотожність, отримаємо

$$\begin{aligned} x \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(x \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} m B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = u \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^{m-1} v^n}{(m-1)! n!} = u \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}$$

Подібним чином ми знаходимо, що

$$y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v}.$$

Таким чином, породжуюча функція G задовольняла систему рівнянь у частинних похідних:

$$\begin{cases} x \frac{\partial G}{\partial x} = u \frac{\partial G}{\partial u}, \\ y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v}. \end{cases}$$

Система двох диференціальних рівнянь, яка містить функцію чотирьох змінних, не може мати більше двох функціонально незалежних розв'язків [27]. Проте xu і yv , очевидно, є її розв'язками і є незалежними. Отже, G має бути лише функцією xu і yv .

\Leftarrow *Достатність.* Тепер доведемо зворотну імплікацію. Маємо

$$G(x, y, u, v) = G(xu, yv).$$

Доведемо, що $B_{m,n}(x, y)$ є однорідним многочленом. Зауважимо, що, оскільки

$$G(sxu, tyv) = G(x(su), y(tv)),$$

то функція G задовольняє тотожність

$$G(sx, ty, u, v) = G(x, y, su, tv).$$

Тепер маємо, з одного боку

$$G(sx, ty, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(sx, ty) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

а з іншого боку отримуємо

$$G(sx, ty, u, v) = G(x, y, su, tv) = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{(su)^m (tv)^n}{m! n!}.$$

Прирівнюючи праві частини, отримуємо

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(sx, ty) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{(su)^m (tv)^n}{m! n!}.$$

Прирівнявши коефіцієнти однакових степенів u і v , отримаємо

$$B_{m,n}(sx, ty) = s^m t^n B_{m,n}(x, y),$$

як і вимагалось. □

2.4. Квазі-мономи відносно групи рівномірних масштабувань площини

Розглянемо групу *рівномірних масштабувань*, тобто такі перетворення площини:

$$\begin{cases} x' = sx, \\ y' = sy, \end{cases}$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Означення 2.4.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є *квазі-мономіальною* відносно групи рівномірних масштабувань площини, якщо

$$B_{m,n}(sx, sy) = s^{m+n} B_{m,n}(x, y), \quad (2.5)$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає повний опис таких многочленів у термінах їх експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 2.4.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

є квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних $\frac{y}{x}$, ux та vx :

$$G = G\left(\frac{y}{x}, ux, vx\right). \quad (2.6)$$

Доведення. \implies *Необхідність.* Диференціюючи тотожність

$$B_{m,n}(sx, sy) = s^{m+n} B_{m,n}(x, y),$$

по s при $s = 1$ ми отримуємо таке рівняння

$$x \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial y} = (m + n) B_{m,n}(x, y).$$

Тоді, подібно до доведення Теорема 2.2.1, знаходимо, що породжуюча функція задовольняє таке рівняння

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} = u \frac{\partial G}{\partial u} + v \frac{\partial G}{\partial v}.$$

Рівняння не може мати більше трьох функціонально незалежних розв'язків, які ми можемо вказати явно: $\frac{y}{x}$, ux , vx . Отже, породжуюча функція є функцією змінних $\frac{y}{x}$, ux , vx .

\longleftarrow *Достатність.* Достатність доводиться так само, як у Теоремі 2.3.1.

□

2.5. Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень площини

Двопараметрична група *паралельних перенесень площини* утворюється перетвореннями виду:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$.

Група діє на функції наступним чином:

$$f(x', y') = f(x + a, y + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Оскільки виконується така рівність для мономів:

$$(x + a)^m (y + b)^n = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^i y^j a^{m-i} b^{n-j},$$

тоді приходимо до такого означення.

Означення 2.5.1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень площини, якщо виконується наступна тотожність*

$$B_{m,n}(x + a, y + b) = \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s} b^{n-k} B_{s,k}(x, y), \quad (2.7)$$

для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема представляє простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 2.5.1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:*

$$G = C(u, v)e^{xu+yv}, \quad (2.8)$$

де $C(u, v)$ — довільний степеневий ряд за змінними u, v .

Доведення. \implies Необхідність. Спочатку диференціюємо рівність (2.7) по a при $a = 0$ і $b = 0$. Отримаємо диференціальне рівняння на $B_{m,n}(x, y)$:

$$\frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} = mB_{m-1,n}(x, y).$$

Аналогічно, диференціюючи по b , отримуємо інше диференціальне рівняння на $B_{m,n}(x, y)$:

$$\frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial y} = nB_{m,n-1}(x, y).$$

Беручи до уваги першу тотожність, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \sum_{m,n=0}^{\infty} mB_{m-1,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = \\ &= u \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m-1,n}(x, y) \frac{u^{m-1} v^n}{(m-1)! n!} = u \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} = uG. \end{aligned}$$

Так само ми отримуємо тотожність

$$\frac{\partial G}{\partial y} = vG.$$

Тому G задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = uG, \\ \frac{\partial G}{\partial y} = vG. \end{cases}$$

Ця система диференціальних рівнянь першого порядку має розв'язок

$$G = C(u, v)e^{xu+yv},$$

де C є функцією змінних u, v . Можна вважати, що $C(u, v)$ є степеневим рядом за змінними u, v , оскільки лише у цьому випадку G буде породжуючою функцією для системи многочленів

\Leftarrow *Достатність.* Доведемо зворотню імплікацію. Припустимо тепер, що породжуюча функція для сім'ї многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ має вигляд

$$G = C(u, v)e^{xu+yv}.$$

Розглянемо оператор зсуву $T_{a,b}$

$$T_{a,b}(x) = x + a, \quad T_{a,b}(y) = y + b.$$

Тоді

$$T_{a,b}(xu + yv) = au + vb + ux + vy.$$

З одного боку маємо

$$T_{a,b}(G) = T_{a,b}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!}\right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} T_{a,b}(B_{m,n}(x, y)) \frac{u^m v^n}{m! n!},$$

а з другого

$$\begin{aligned} T_{a,b}(G) &= C(u, v)T_{a,b}(e^{xu+yv}) = C(u, v)e^{T_{a,b}(xu+yv)} = C(u, v)e^{au+vb+ux+vy} = \\ &= e^{au+vb}G = \left(\sum_{k,s=0}^{\infty} a^s b^k \frac{u^s v^k}{s! k!}\right) \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!}\right) = \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s} b^{n-k} B_{s,k}(x, y)\right) \frac{u^m v^n}{m! n!}. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти однакових степенів u і v , отримаємо, що

$$T_{a,b}(B_{m,n}(x, y)) = \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s} b^{n-k} B_{s,k}(x, y).$$

Отже, многочлени $B_{m,n}(x, y)$ є квазі-мономами відносно групи паралельних перенесень площини. \square

Властивість квазі-мономіальності може зникнути, якщо многочлени нормалізувати, тобто помножити на деякі константи. Нормалізація часто використовується для обмеження допустимого діапазону значень многочлена в обчисленнях. Наступна теорема показує, який вид нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

Теорема 2.5.2. *Нехай сім'я $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини $T(2)$. Сім'я многочленів $\{\tilde{B}_{m,n}(x, y)\}$, де*

$$\tilde{B}_{m,n}(x, y) = \alpha_{m,n} B_{m,n}(x, y), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

є квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли кожен коефіцієнт $\alpha_{m,n}$ є довільною функцією φ на множині натуральних чисел, яка задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m+n) = \varphi(m+n-1),$$

для всіх $m, n \in \mathbb{N}$.

Доведення. \implies Необхідність. Оскільки

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m,n}(x, y)}{\partial x} = m \tilde{B}_{m-1,n-1}(x, y), \quad \frac{\partial \tilde{B}_{m,n}(x, y)}{\partial y} = n \tilde{B}_{m,n-1}(x, y).$$

то будемо мати, що

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n} \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial x} &= m \alpha_{m-1,n} B_{m+1,n}(x, y), \\ \alpha_{m,n} \frac{\partial B_{m,n}(x, y)}{\partial y} &= n \alpha_{m,n-1} B_{m,n-1}(x, y). \end{aligned}$$

Отримали систему рекурентних рівнянь для послідовності $\alpha_{m,n}$:

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n} = \alpha_{m,n}, \\ \alpha_{m,n-1} = \alpha_{m,n}. \end{cases}$$

Можна показати, що розв'язком цієї системи рівнянь є

$$\alpha_{m,n} = \varphi(m+n-1),$$

де φ — довільна функція.

\Leftarrow *Достатність.* Тепер доведемо зворотну імплікацію. Якщо

$$\alpha_{m,n} = \varphi(m+n-1),$$

то очевидно, що

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n} = \alpha_{m,n}, \\ \alpha_{m,n-1} = \alpha_{m,n}. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m,n}(x,y)}{\partial x} = \alpha_{m,n} \frac{\partial B_{m,n}(x,y)}{\partial x} = m \alpha_{m-1,n} B_{m-1,n}(x,y) = m \tilde{B}_{m-1,n}(x,y).$$

Таким же чином, отримуємо, що

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m,n}(x,y)}{\partial y} = n \tilde{B}_{m,n-1}(x,y).$$

Отже, породжуюча функція для многочленів $\tilde{B}_{m,n-1}(x,y)$ задовольняє умови Теорема 2.5.1 і сім'я многочленів $\tilde{B}_{m,n}$ буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини. \square

Знаючи породжуючу функцію для системи многочленів, можна отримати їх явний вигляд. Наприклад, розглянемо наступну породжуючу функцію

$$G = \frac{1}{1 - (u^2 + v^2)} e^{xu+yv} = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n} \frac{u^m v^n}{m! n!}.$$

Для малих m, n отримуємо

$$\begin{aligned} B_{0,0}(x,y) &= 1, & B_{1,0}(x,y) &= x, & B_{0,1}(x,y) &= y, \\ B_{2,0}(x,y) &= x^2 + 2, & B_{1,1}(x,y) &= xy, & B_{0,2}(x,y) &= y^2 + 2, \\ B_{3,0}(x,y) &= x^3 + 6x, & B_{2,1}(x,y) &= x^2y + 2y, \\ B_{1,2}(x,y) &= xy^2 + 2x, & B_{0,3}(x,y) &= y^3 + 6y. \end{aligned}$$

Знайдемо явну формулу для цих многочленів. Маємо

$$\frac{1}{1 - (u^2 + v^2)} = \sum_{i=0}^{\infty} (u^2 + v^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} u^{2k} v^{2(i-k)} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} u^i v^k,$$

де

$$a_{i,k} = \begin{cases} \binom{\frac{i+k}{2}}{\frac{i}{2}}, & \text{якщо } i, k \text{ - парні,} \\ 0. & \end{cases}$$

Оскільки

$$e^{xu+yv} = \sum_{j=0}^{\infty} (xu + yv)^j \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} (xu)^s (yv)^{j-s} \frac{1}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^j y^s}{j! s!} u^j v^s,$$

то матимемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (u^2 + v^2)} e^{xu+yv} &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} u^i v^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^j y^s}{j! s!} u^j v^s \right) = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \left(r! t! \sum_{i+j=r, k+s=t} a_{i,k} \frac{x^j y^s}{j! s!} \right) \frac{u^r v^t}{r! t!}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} B_{r,t}(x, y) &= r! t! \sum_{\substack{i+j=r \\ k+s=t}} a_{i,k} \frac{x^j y^s}{j! s!} = r! t! \sum_{\substack{2i+j=r \\ 2k+s=t}} a_{2i,2k} \frac{x^j y^s}{j! s!} = \\ &= r! t! \sum_{\substack{2i+j=r \\ 2k+s=t}} \binom{i+k}{i} \frac{x^j y^s}{j! s!} = r! t! \sum_{i=0}^{r/2} \sum_{k=0}^{t/2} \binom{i+k}{i} \frac{x^{r-2i} y^{t-2k}}{(r-2i)! (t-2k)!}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що многочлени $B_{m,n}(x, y)$ задовольняють рекурентні співвідношення, які наводимо без доказів.

Теорема 2.5.3. *Многочлени $B_{m,n}(x, y)$ задовольняють такі рекурентні співвідношення:*

$$\begin{aligned} B_{m+1,n}(x, y) &= x B_{m,n}(x, y) + 2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{s=0}^{(m-1)/2} h_{s,k}^{(m,n)} B_{m-2s-1, n-2k}(x, y), \\ B_{m,n+1}(x, y) &= y B_{m,n}(x, y) + 2 \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \sum_{s=0}^{(m-1)/2} h_{k,s}^{(n,m)} B_{m-2s, n-2k-1}(x, y), \end{aligned}$$

де

$$h_{s,k}^{(m,n)} = (2s+1)! (2k)! \binom{m}{2s+1} \binom{n}{2k} \binom{s+k}{k}.$$

2.6. Квазі-мономи відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини

Розглянемо частковий випадок *рівномірних паралельних перенесень площини*:

$$T_a(x) = x + a, \quad T_a(y) = y + a,$$

де $a \in \mathbb{R}$.

Двопараметрична група рівномірних паралельних перенесень площини утворюється перетвореннями виду:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + a, \end{cases}$$

де $a \in \mathbb{R}$.

Група діє на функції наступним чином:

$$f(x', y') = f(x + a, y + a).$$

Оскільки

$$(x + a)^m (y + a)^n = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \binom{m}{i} \binom{n}{j} x^i y^j a^{m-i+n-j},$$

то приходимо до такого означення.

Означення 2.6.1. *Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ називається **квазі-мономіальною сім'єю відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини**, якщо виконується наступна тотожність*

$$B_{m,n}(x + a, y + a) = \sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s+n-k} B_{s,k}(x, y), \quad (2.9)$$

для всіх $a \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.

Вірне наступне твердження.

Теорема 2.6.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ буде квазі-мономіальною сім'єю відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:

$$G = C(x - y, u, v)e^{xu+yv}, \quad (2.10)$$

де C – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, u, v$.

Доведення аналогічне до доведення Теорема 2.5.1.

У другому розділі проведено комплексне аналітичне дослідження сімей многочленів від двох змінних, що мають властивість квазі-мономіальності відносно ключових підгруп афінної групи площини $\text{Aff}(2)$. Наукові результати розділу можна сформулювати у наступних положеннях:

Формалізовано концептуальне визначення квазі-мономіальності: сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ визначена як квазі-мономіальна відносно підгрупи $H \subset \text{Aff}(2)$, якщо лінійні оператори даної підгрупи у базисі $\{B_{m,n}(x, y)\}$ мають таку саму матричну реалізацію, яку вони мають у стандартному мономіальному базисі $\{x^m y^n\}$. Це дозволяє переносити алгебраїчну структуру моментних інваріантів з класичних моментів на нові типи поліноміальних базисів.

Встановлено та математично доведено необхідні й достатні умови квазі-мономіальності для основних геометричних перетворень площини. Опис відповідних сімей здійснено через апарат експоненціальних породжуючих функцій

$$G(x, y, u, v) = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x, y) \frac{u^m v^n}{m! n!} :$$

— для групи обертань $SO(2)$ доведено, що G є функцією змінних:

$$G = G(ux + vy, x^2 + y^2, u^2 + v^2);$$

— для групи масштабувань встановлено вигляд $G = G(xu, yv)$;

— для групи паралельних перенесень функція має вигляд $G = C(u, v)e^{xu+yv}$, де $C(u, v)$ — степеневий ряд.

Виявлено фундаментальну закономірність збереження квазі-мономіальних властивостей при нормалізації. Доведено, що для групи паралельних перенесень $T(2)$ нормована сім'я $\tilde{B}_{m,n}(x, y) = \alpha_{m,n}B_{m,n}(x, y)$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\{\alpha_{m,n}\}$ є функцією $\varphi(m+n)$, що задовольняє рекурентне співвідношення $\varphi(m+n) = \varphi(m+n-1)$.

Виведено рекурентні співвідношення для побудови квазі-мономіальних сімей, що забезпечує обчислювальну стабільність алгоритмів при високих порядках моментів:

$$B_{m+1,n}(x, y) = xB_{m,n}(x, y) + 2 \sum_{k=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil} \sum_{s=0}^{(m-1)/2} h_{s,k}^{(m,n)} B_{m-2s-1, n-2k}(x, y),$$

$$B_{m,n+1}(x, y) = yB_{m,n}(x, y) + 2 \sum_{k=0}^{\lceil (n-1)/2 \rceil} \sum_{s=0}^{(m-1)/2} h_{k,s}^{(n,m)} B_{m-2s, n-2k-1}(x, y),$$

де вагові коефіцієнти $h_{s,k}^{(m,n)}$ визначаються комбінаторними залежностями:

$$h_{s,k}^{(m,n)} = (2s+1)!(2k)! \binom{m}{2s+1} \binom{n}{2k} \binom{s+k}{k}.$$

Теоретична значущість отриманих результатів полягає у розширенні класичної теорії моментних інваріантів на широкі класи ортогональних та неортогональних многочленів. Практична цінність полягає у можливості створення швидких, чисельно стійких алгоритмів для систем комп'ютерного зору та машинного навчання, зокрема для задач розпізнавання об'єктів, що зазнають афінних деформацій.

Результати даного розділу пройшли апробацію та були опубліковані у наукових працях [2, 41, 42].

РОЗДІЛ 3. КВАЗІ-МОНОМИ ВІДНОСНО ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ ПРОСТОРУ

3.1. Постановка задачі та основні визначення квазі-мономіальності в просторі

Останнім часом квазі-мономіальні сім'ї многочленів знайшли широке застосування в аналізі 2D та 3D зображень. Виникла проблема, пов'язана з необхідністю виділити такі ознаки зображень, які залишаються інваріантними при геометричних перетвореннях площини або простору. Такими перетвореннями є обертання, паралельні перенесення, масштабування та композиція цих перетворень [19]. Відповідні інваріантні ознаки для 2D зображень були вперше представлені у статті [25] та називаються *геометричними моментними інваріантами*. Проте, ці моментні інваріанти конструювалися у стандартному поліноміальному базисі $\{x^m y^n\}$, що спричиняло практичні труднощі через обчислювальну нестабільність при роботі в дискретних областях, оскільки значення $x^m y^n$ швидко зростають зі збільшенням розміру зображення. Перехід до інших базисів, особливо до базисів із класичних дискретних ортогональних многочленів, вирішив проблему нестабільності. Але тепер виникла нова проблема знаходження явних виразів для моментних інваріантів, які змінилися із зміною базису. Знаходження виразів для моментних інваріантів в новому базису стикається з великими технічними труднощами і задовільно вирішується лише для деяких часткових випадків [13].

Подальший розвиток цієї ідеї був здійснений у роботі [6]. У своїй праці вони запропонували повний опис усіх многочленів, які мають властивість зберігати форму моментних інваріантів при зміні базису. Ця властивість дістала назву квазі-мономіальності. Авторами отримано повний опис усіх сімей

многочленів в термінах їхніх породжуючих функцій, що володіють цією властивістю, яка була названа властивістю квазі-мономіальності відносно групи обертань площини $SO(2)$. Знання таких квазі-мономів для основних груп перетворень площини й простору є важливим для побудови швидких і стабільних алгоритмів обчислення моментних інваріантів.

У роботі [41] поняття квазі-мономіальності було поширено на довільну підгрупу H афінної групи площини $\text{Aff}(2)$ та отримано опис квазі-мономів для випадку, коли група H генерується масштабуваннями та паралельними перенесеннями площини, а також їхніми композиціями, в тому числі з обертаннями.

Запропонований підхід природно узагальнити на тривимірний випадок, де замість функцій двох змінних розглядаються функції трьох змінних, що дає змогу застосовувати аналогічні ідеї для аналізу 3D-зображень. У зв'язку з цим актуальним є дослідження квазі-мономів для різних підгруп афінних груп перетворень простору та встановлення їхніх властивостей.

У цьому розділі ми продовжуємо цей напрям досліджень і пропонуємо опис всіх сімей многочленів від трьох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп масштабувань та паралельних перенесень афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. В цьому розділі встановлено необхідні і достатні умови того, щоб сім'я многочленів була квазі-мономіальною відносно підгруп масштабувань або паралельних перенесень. Крім того, встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності.

Наведемо основні означення. Введемо поняття квазі-мономіальності відносно довільної підгрупи афінної групи простору $\text{Aff}(3)$.

Нехай H є підгрупою афінної групи простору $\text{Aff}(3)$, яка розглядається разом з природною дією на векторному просторі многочленів з трьома змінними.

Означення 3.1.1. Сім'ю многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається **квазі-**

мономіальною відносно групи H , якщо оператори груп у двох різних базисах $\{x^m y^n z^k\}$ та $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ мають однакові матриці. З цієї причини, сім'ю многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називатимемо *квазі-мономіальною*.

3.2. Квазі-мономи відносно групи масштабувань простору

Група масштабувань простору є трипараметричною групою перетворень тривимірного простору, які масштабують координати точок незалежно за осями x, y та z відповідно до коефіцієнтів масштабування s, t та r . Масштабування може збільшувати або зменшувати об'ємні фігури та відстані між точками, але зберігає відносні пропорції фігур.

Формула перетворень координат при масштабуванні у просторі може бути записана як:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

де (x, y, z) – координати початкової точки, (x', y', z') – координати точки після масштабування, а s, t та r – коефіцієнти масштабування вздовж відповідних осей ($s, t, r \in \mathbb{R}$).

Група масштабування простору діє операторами $T_{s,t,r}$ на функції таким чином:

$$T_{s,t,r}(f(x, y, z)) = f(sx, ty, rz), \quad s, t, r \in \mathbb{R}.$$

Зокрема, для мономів маємо:

$$T_{s,t,r}(x^m y^n z^k) = s^m t^n r^k x^m y^n z^k.$$

Нас цікавлять сім'ї многочленів, на які оператори групи $T_{s,t,r}$ діють аналогічним чином.

Означення 3.2.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається **квазі-мономіальною** відносно групи масштабувань простору, якщо дія групи на ці многочлени збігається з дією групи на мономи, тобто виконується тотожність:

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = s^m t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z), \quad (3.1)$$

для всіх $s, t, r \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема описує всі сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними відносно групи масштабувань простору в термінах породжуючої функції.

Теорема 3.2.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненційною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи масштабувань простору тоді і тільки тоді, коли G є функцією від трьох змінних xu, yv і zw :

$$G = G(xu, yv, zw). \quad (3.2)$$

Доведення. \implies Необхідність. Припустимо, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ задовольняє умову (3.1).

Спочатку доведемо, що у цьому випадку многочлени $B_{m,n,k}(x, y, z)$ для всіх індексів m, n, k задовольняють таку систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m,n,k}(x, y, z), \\ y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = n B_{m,n,k}(x, y, z), \\ z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = k B_{m,n,k}(x, y, z). \end{cases}$$

Справді, продиференціюємо тотожність (3.1) по змінній s , матимемо:

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(sx, ty, rz)}{\partial x} = ms^{m-1}t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Поклавши $s = 1, t = 1, r = 1$, отримаємо

$$x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = mB_{m,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно, послідовними диференціюванням по t та по r отримуються друга та третя тотожності.

Враховуючи першу доведену тотожність, отримаємо

$$\begin{aligned} x \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} mB_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^{m-1} v^n w^k}{(m-1)! n! k!} = u \frac{\partial G}{\partial u}. \end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо, що мають місце рівняння

$$y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v},$$

$$z \frac{\partial G}{\partial z} = w \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Отже, породжуюча функція G задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial G}{\partial x} = u \frac{\partial G}{\partial u}, \\ y \frac{\partial G}{\partial y} = v \frac{\partial G}{\partial v}, \\ z \frac{\partial G}{\partial z} = w \frac{\partial G}{\partial w}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Система з трьох диференціальних рівнянь, для функції від шести змінних, не може мати більше трьох функціонально незалежних розв'язків [27]. Однак, xu, yv і zw є очевидно є функціонально незалежними розв'язками. Отже, G повинна бути функцією лише від змінних xu, yv і zw .

\Leftarrow *Достатність.* Тепер доведемо зворотну імплікацію. Нехай

$$G(x, y, z, u, v, w) = G(xu, yv, zw).$$

Доведемо, що $B_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє умову (3.1):

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z).$$

Зауважимо, що, оскільки

$$G(sxu, tyv, rz w) = G(x(su), y(tv), z(rw)),$$

то функція G задовольняє тотожність

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = G(x, y, z, su, tv, rw).$$

Тепер, з одного боку ми маємо

$$G(sx, ty, rz, u, v, w) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

а з іншого боку:

$$\begin{aligned} G(sx, ty, rz, u, v, w) &= G(x, y, z, su, tv, rw) = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{(su)^m (tv)^n (rw)^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи ліву і праву частини, отримуємо:

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(sx, ty, rz) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{(su)^m (tv)^n (rw)^k}{m! n! k!}.$$

Прирівнявши коефіцієнти біля однакових степенів u і v , знаходимо, що

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = t^m s^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

як і вимагалось. □

3.3. Квазі-мономи відносно групи рівномірних масштабувань простору

Розглянемо частковий випадок групи *рівномірних масштабувань простору*, тобто таких перетворень простору:

$$\begin{cases} x' = sx, \\ y' = sy, \\ z' = sz, \end{cases}$$

де $s \in \mathbb{R}$.

Означення 3.3.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається **квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань простору**, якщо виконується тотожність:

$$B_{m,n,k}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z). \quad (3.4)$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає повний опис таких многочленів у термінах породжуючих функцій.

Теорема 3.3.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань простору тоді і тільки тоді коли G є функцією від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right). \quad (3.5)$$

Доведення. \implies *Необхідність.* Диференціюючи по s тотожність

$$B_{m,n,k}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z),$$

і, поклавши $s = 1$, отримуємо таке диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} + y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} + z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = \\ = (m + n + k) B_{m,n,k}(x, y, z). \end{aligned}$$

Тоді, аналогічно, як при доведенні Теорема 3.2.1, знаходимо, що породжуюча функція G задовольняє таке рівняння

$$x \frac{\partial G}{\partial x} + y \frac{\partial G}{\partial y} + z \frac{\partial G}{\partial z} = u \frac{\partial G}{\partial u} + v \frac{\partial G}{\partial v} + w \frac{\partial G}{\partial w}.$$

Це рівняння не може мати більше п'яти функціонально незалежних розв'язків, які ми можемо вказати явно: $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$. Тому, породжуюча функція є функцією від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$.

\Leftarrow *Достатність.* Достатність доводиться аналогічно як в Теоремі 3.2.1. □

3.4. Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору

Трипараметрична група паралельних перенесень простору породжується паралельними перенесеннями такої форми:

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \\ z' = z + c, \end{cases}$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Ця група діє на функції операторами зсуву $T_{a,b,c}$ наступним чином:

$$T_{a,b,c}(f(x, y, z)) = f(x + a, y + b, z + c), \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Оскільки

$$(x + a)^m (y + b)^n (z + c)^k = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} x^i y^j z^l a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l},$$

то ми приходимо до наступного означення.

Означення 3.4.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається **квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору**, якщо виконується наступна тотожність:

$$\begin{aligned} B_{m,n,k}(x + a, y + b, z + c) = \\ = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \end{aligned} \quad (3.6)$$

для всіх $a, b, c \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 3.4.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:

$$G = C(u, v, w) e^{xu+yv+zw}, \quad (3.7)$$

де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд за змінними u, v, w .

Доведення. \implies *Необхідність.* Спочатку диференціюємо (3.6) по a при $a = 0$ та $b = 0, c = 0$. Отримуємо диференціальне рівняння на $B_{m,n,k}(x, y, z)$:

$$\frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = m B_{m-1,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно, диференціюючи (3.6) по b та по c , отримуємо два інші диференціальні рівняння на $B_{m,n,k}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n B_{m,n-1,k}(x, y, z), \\ \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k B_{m,n,k-1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Взявши до уваги першу тотожність, отримаємо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(\frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\
 &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} m B_{m-1,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\
 &= u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m-1,n,k}(x,y,z) \frac{u^{m-1} v^n w^k}{(m-1)! n! k!} = \\
 &= u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = uG.
 \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо, що

$$\frac{\partial G}{\partial y} = vG \quad \text{і} \quad \frac{\partial G}{\partial z} = wG.$$

Отже, G задовольняє таку систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x} = uG, \\ \frac{\partial G}{\partial y} = vG, \\ \frac{\partial G}{\partial z} = wG. \end{cases} \quad (3.8)$$

Ця проста система диференціальних рівнянь першого порядку має такий розв'язок

$$G = C(u, v, w) e^{xu+yv+zw},$$

де C – довільна функція від u, v, w . Оскільки G є степеневим рядом, то $C(u, v, w)$ також степеневий ряд за змінними u, v, w .

\Leftarrow *Достатність.* Припустимо тепер, що породжуюча функція для сім'ї многочленів $B_{m,n,k}(x, y, z)$ має вигляд

$$G = C(u, v, w) e^{xu+yv+zw}.$$

Для оператора зсуву маємо

$$T_{a,b,c}(xu + yv + zw) = au + vb + cw + ux + vy + zw.$$

З одного боку,

$$\begin{aligned} T_{a,b,c}(G) &= T_{a,b,c} \left(\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} \right) = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x, y, z)) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

З іншого боку

$$\begin{aligned} T_{a,b,c}(G) &= C(u, v, w) T_{a,b,c}(e^{xu+yv+zw}) = C(u, v, w) e^{au+vb+cw+ux+vy+zw} = \\ &= e^{au+vb+cw} G = \left(\sum_{i,j,l=0}^{\infty} a^i b^j c^l \frac{u^i v^j w^l}{i! j! l!} \right) \left(\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} \right) = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z) \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти однакових степенів u та v , отримуємо, що

$$T_{a,b,c}(B_{m,n,k}(x, y, z)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z).$$

Отже, многочлени $B_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономами відносно групи паралельних перенесень простору. \square

Зауважимо, що властивість квазі-мономіальності може зникнути, якщо многочлени нормалізуються, тобто множаться на деякі константи. Нормалізація часто використовується для обмеження допустимого діапазону значень многочленів при обчисленнях. Наступна теорема встановлює, який тип нормалізації зберігає властивість бути квазі-мономом.

Теорема 3.4.2. Нехай $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ – квазі-мономіальна сім'я відносно групи паралельних перенесень простору. Сім'я $\{\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)\}$, де

$$\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} B_{m,n,k}(x, y, z), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є функцією φ від однієї змінної $m + n + k$, яка задовольняє таке рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m + n + k) = \varphi(m + n + k - 1),$$

де $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Доведення. \implies *Необхідність.* Оскільки виконується

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= m \tilde{B}_{m-1,n,k}(x, y, z), \\ \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n \tilde{B}_{m,n-1}(x, y, z), \\ \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k \tilde{B}_{m,n,k-1}(x, y, z), \end{aligned}$$

ТО МИ МАЄМО

$$\begin{aligned} \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= m \alpha_{m-1,n,k} B_{m-1,n,k}(x, y, z), \\ \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} &= n \alpha_{m,n-1,k} B_{m,n-1,k}(x, y, z), \\ \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} &= k \alpha_{m,n,k-1} B_{m,n,k-1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Отримуємо наступну систему рекурентних рівнянь для послідовності

$\alpha_{m,n}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{array} \right.$$

Легко помітити, що розв'язок системи має вигляд $\alpha_{m,n,k} = \varphi(m+n+k)$, де φ – довільна функція. Справді, розглянемо довільний індекс (m, n, k) . Ми можемо досягти індексу $(0, 0, m+n+k)$ через послідовність перетворень, як показано нижче. Спочатку зменшуємо m , збільшуючи n , доки $m = 0$: $\alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{m,n,k}$. Потім зменшуємо n , збільшуючи k , доки $n = 0$:

$$\alpha_{0,0,m+n+k} = \alpha_{0,n+m,k}.$$

В результаті маємо:

$$\alpha_{m,n,k} = \alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{0,0,m+n+k}.$$

Тепер можемо визначити функцію $\varphi(x) = \alpha_{0,0,x}$. Тоді

$$\alpha_{m,n,k} = \varphi(m+n+k),$$

що показує, що будь-який розв'язок системи є функцією змінної $m+n+k$.

Підставимо розв'язок $\alpha_{m,n,k} = \varphi(m+n+k)$ у перше рівняння і отримуємо необхідне рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m+n+k) = \varphi(m+n+k-1).$$

\Leftarrow *Достатність.* Тепер доведемо обернену імплікацію. Нехай

$$\alpha_{m,n,k} = \varphi(m+n+k), \quad \text{і} \quad \varphi(m+n+k) = \varphi(m+n+k-1).$$

Тоді, очевидно, виконуються умови:

$$\begin{cases} \alpha_{m-1,n,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{cases}$$

Звідси

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \alpha_{m,n,k} \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} =$$

$$= m\alpha_{m-1,n,k}B_{m-1,n,k}(x, y, z) = m\tilde{B}_{m-1,n,k}(x, y, z).$$

Аналогічно отримуємо

$$\frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = n\tilde{B}_{m,n-1,k}(x, y, z) \quad \text{і} \quad \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = k\tilde{B}_{m,n,k-1}(x, y, z).$$

Отже, породжуюча функція для сім'ї многочленів $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє умови Теорема 3.4.1 і сім'я многочленів $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ буде квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень простору. \square

3.5. Квазі-мономи відносно групи рівномірних паралельних перенесень простору

Розглянемо частковий випадок рівномірних паралельних перенесень простору $T_{a,a,a} = T_a$:

$$T_a(x) = x + a, \quad T_a(y) = y + a, \quad T_a(z) = z + a,$$

де $a \in \mathbb{R}$.

Справедливе наступне твердження.

Означення 3.5.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається **квазі-мономіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень простору**, якщо виконується наступна тотожність

$$B_{m,n,k}(x + a, y + a, z + a) = \tag{3.9}$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m+n+k-i-j-l} B_{i,j,l}(x, y, z),$$

для всіх $a \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Наступна теорема дає простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції.

Теорема 3.5.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:

$$C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}, \quad (3.10)$$

де $C(x - y, x - z, u, v, w)$ – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, x - z, u, v, w$.

Доведення. \implies *Необхідність.* Умова квазі-мономіальності (3.6) прийме вигляд:

$$\begin{aligned} & B_{m,n,k}(x + a, y + a, z + a)(x, y, z) = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m+n+k-i-j-l} B_{i,j,l}(x, y, z), \end{aligned}$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Диференціюємо цю тотожність по a в $a = 0$ та знаходимо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} = \\ &= mB_{m-1,n,k}(x, y, z) + nB_{m,n-1,k}(x, y, z) + kB_{m,n,k-1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Аналогічно отримаємо диференціальне рівняння на породжуючу функцію:

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial z} = (u + v + w)G.$$

Можна показати, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$G = C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}.$$

\Leftarrow *Достатність.* Достатність доводиться аналогічно доведенню достатності в Теоремі 3.4.1. □

Виникає природне питання – чи існують сім’ї многочленів, які є квазі-мономіальними одночасно відносно групи масштабувань і відносно групи паралельних перенесень? Породжуюча функція для таких многочленів мала би бути одночасним розв’язком систем диференціальних рівнянь (3.3) і (3.8). Можна показати, що єдиним розв’язком цих систем рівнянь, з точністю до сталого множника, є функція $e^{xu+yv+zw}$. Але вона є експоненціальною породжуючою функцією стандартних мономів $x^m y^n z^k$ і ми не отримуємо ніяких нових сімей многочленів.

У третьому розділі проведено теоретичне дослідження квазі-мономіальних сімей многочленів від трьох змінних, які є інваріантними відносно підгруп масштабувань та паралельних перенесень афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. Основними результатами розділу є наступні положення.

Запропоновано теоретичне узагальнення поняття квазі-мономіальності на тривимірний випадок. Визначено, що сім’я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною відносно підгрупи $H \subset \text{Aff}(3)$, якщо оператори групи у двох різних базисах $\{x^m y^n z^k\}$ та $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ мають однакові матриці. Це створює підґрунтя для перенесення класичних методів побудови інваріантів на нові типи поліноміальних базисів.

Встановлено необхідні і достатні умови квазі-мономіальності відносно *групи масштабувань простору*. Доведено, що експоненціальна породжуюча функція такої сім’ї G є функцією від трьох змінних:

$$G = G(xu, yv, zw).$$

Показано, що такі многочлени для всіх індексів m, n, k задовольняють

систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} x \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} = m B_{m,n,k}(x,y,z), \\ y \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y} = n B_{m,n,k}(x,y,z), \\ z \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial z} = k B_{m,n,k}(x,y,z). \end{cases}$$

Для групи рівномірних масштабувань простору знайдено загальний вигляд породжуючої функції, яка визначається п'ятьма функціонально незалежними розв'язками відповідного рівняння в частинних похідних:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

Це забезпечує виконання тотожності:

$$B_{m,n,k}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z),$$

що є критично важливим для аналізу об'єктів при зміні масштабу спостереження.

Описано всі сім'ї многочленів, квазі-мономіальні відносно групи паралельних перенесень простору. Доведено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ належить до цього класу тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд:

$$G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw},$$

де $C(u, v, w)$ — довільний степеневий ряд. Такий вигляд гарантує збереження форми біноміального розкладу при дії операторів зсуву $T_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Виявлено критерій збереження властивості квазі-мономіальності при нормалізації многочленів константами $\alpha_{m,n,k}$. Встановлено, що для групи паралельних перенесень така нормалізація зберігає властивість квазі-мономіальності тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є функцією φ від однієї змінної $m + n + k$, що задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m + n + k) = \varphi(m + n + k - 1).$$

Це обґрунтовує можливість коректного масштабування значень многочленів без втрати їхніх геометричних властивостей.

Досліджено випадок *рівномірних паралельних перенесень* та встановлено вигляд породжуючої функції:

$$G = C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}.$$

Доведено, що єдиним розв'язком, який одночасно задовольняє умови квазі-мономіальності для груп масштабування та паралельного перенесення, є стандартна експоненціальна функція мономів, що вказує на фундаментальну відмінність між цими класами трансформацій.

Результати розділу мають важливе прикладне значення для побудови ознак у задачах розпізнавання та класифікації 3D-зображень, оскільки дозволяють формувати моментні інваріанти, що залишаються незмінними при геометричних перетвореннях простору.

Результати розділу опубліковано у працях [1, 40].

РОЗДІЛ 4. $SO(3)$ -КВАЗІ-МОНОМІАЛЬНІ СІМ'Ї

4.1. Аналіз $SO(3)$ -інваріантності та застосування біортогональних многочленів Аппеля

Останнім часом квазі-мономи знайшли широке застосування в аналізі 3D зображень. Як було вставлено в попередніх розділах ця важлива властивість квазі-мономіальності многочленів Ерміта дозволила ефективно обчислити $SO(2)$ -моментні інваріанти зображення. Детальну інформацію про моментні інваріанти зображення можна знайти в [5, 19].

У статті [6] ці ідеї були розвинені, і отримано повний опис усіх сімей многочленів, які є квазі-мономіальними відносно групи обертання площини $SO(2)$. Також у цій статті було доведено, що біортогональні многочлени Аппеля від двох змінних є квазі-мономами відносно $SO(2)$, і знайдено рекурентні співвідношення для цих многочленів. Знаходження рекурентних співвідношень для квазі-мономів є дуже важливим, тому що під час чисельного обчислення многочленів Аппеля за допомогою явних формул ми можемо зіткнутися з втратою точності через переповнення чи недоповнення числа з плаваючою комою. Використання рекурентних співвідношень дозволяє проводити ефективні та стабільні обчислення, що має вирішальне значення для програм.

У роботі [41] отримано опис квазі-мономів для випадку, коли група H породжена масштабуваннями, обертаннями та паралельними перенесеннями площини. У статті [21] біортогональні многочлени Аппеля трьох змінних були використані для розпізнавання 3D-об'єктів.

У цьому розділі пропонуємо вичерпний опис, подібний до 2D випадку, сім'ї многочленів, яка є квазі-мономіальною відносно групи обертань просто-

ру $SO(3)$. Доведено, що сім'я многочленів буде квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли експоненціальна породжуюча функція цієї сім'ї є функцією трьох змінних $ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2$. Крім того, встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає квазі-мономіальну властивість. У цьому розділі буде доведено, що біортогональні многочлени Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами $SO(3)$ та наведено для них рекурентні співвідношення.

4.2. $SO(3)$ -квазі-мономи

Група обертань простору $SO(3)$ (спеціальна ортогональна група) — це група всіх обертань навколо початку координат тривимірного евклідового простору. Це трипараметрична група з наступною матричною реалізацією:

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix},$$

$$T_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

де параметри $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$ є кутами Ейлера.

Поворот $T_{\alpha,\beta,\gamma} = T_\alpha T_\beta T_\gamma$ відображає точку (x, y, z) у нову точку (x', y', z') наступним чином:

$$\begin{aligned}
x' &= (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma)x + \\
&\quad + (-\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)y + \sin \alpha \sin \beta z, \\
y' &= (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma)x + \\
&\quad + (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma)y - \cos \alpha \sin \beta z, \\
z' &= \sin \beta \sin \gamma x + \sin \beta \cos \gamma y + \cos \beta z.
\end{aligned}$$

З ортогональності групи випливає, що перетворення групи зберігають довжини векторів, тобто, справджується наступна тотожність:

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Одночлени $x^m y^n z^k$ перетворюються при обертанні як

$$\begin{aligned}
&T_{\alpha, \beta, \gamma}(x^m \cdot y^n \cdot z^k) = \\
&\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) x^{m_1+n_1+k_1} y^{m_2+n_2+k_2} z^{m_3+n_3+k_3},
\end{aligned}$$

де $C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3)$ – деякий вираз.

Нас цікавлять многочлени, які перетворюються при обертанні $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ так само, як перетворюються мономи $x^m y^n z^k$. Це приводить нас до наступного означення.

Означення 4.2.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ називається **квазі-мономіальною відносно групи обертань простору $SO(3)$** , якщо виконується тотожність:

$$\begin{aligned}
&T_{\alpha, \beta, \gamma}(B_{m,n,k}(x, y, z)) = \\
&= \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) B_{m_1+n_1+k_1, m_2+n_2+k_2, m_3+n_3+k_3},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Зауважимо, що коефіцієнти $C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3)$ такі самі, як і коефіцієнти у виразі для $T_{\alpha, \beta, \gamma}(x^m \cdot y^n \cdot z^k)$.

Наступна теорема представляє простий критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів через експоненціальну породжуючу функцію.

Теорема 4.2.1. Сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією

$$G = G(x, y, z, u, v, w) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m}{m!} \frac{v^n}{n!} \frac{w^k}{k!},$$

є квазі-мономіальною відносно групи обертань $SO(3)$ тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних $ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2$ і $u^2 + v^2 + w^2$:

$$G = G(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2). \quad (4.2)$$

Доведення. \implies *Необхідність.* Спочатку доведемо пряму імплікацію. Почнемо з формулювання допоміжної леми.

Лема 4.2.1. Нехай $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною сім'єю. Тоді виконуються такі тотожності:

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} - y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \\ & = nB_{m+1,n-1,k}(x, y, z) - mB_{m-1,n+1,k}(x, y, z), \\ & x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} - z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \\ & = kB_{m+1,n,k-1}(x, y, z) - mB_{m-1,n,k+1}(x, y, z), \\ & y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial z} - z \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} = \\ & = kB_{m,n+1,k-1}(x, y, z) - nB_{m,n-1,k+1}(x, y, z). \end{aligned}$$

Доведення. Оскільки будь-яке обертання $T_{\alpha, \beta, \gamma}$ є добутком $T_{\alpha, \beta, \gamma} = T_{\alpha} T_{\beta} T_{\gamma}$, то квазі-мономи задовольняють таку тотожність:

$$T_{\alpha}(B_{m,n,k}(x, y, z)) = T_{\alpha, \beta, \gamma}(B_{m,n,k}(x, y, z))|_{\beta=\gamma=0} =$$

$$= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{m}{i} \binom{n}{j} (\cos \alpha)^{m-i+j} (\sin \alpha)^{n-j+i} B_{m+n-i-j, i+j, k}(x, y, z).$$

Після диференціювання рівності відносно α при $\alpha = 0$ знаходимо, що многочлен $B_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє таке диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} - y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} &= \\ &= n B_{m+1, n-1, k}(x, y, z) - m B_{m-1, n+1, k}(x, y, z). \end{aligned}$$

Подібним чином отримуємо решту рівнянь. \square

Продовження доведення теореми. Використаємо лему 4.2.1 для дослідження похідних породжуючої функції G . Це означає (подібно до випадку 2D), що G задовольняє систему лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$\begin{cases} x \frac{\partial G}{\partial y} - y \frac{\partial G}{\partial x} = v \frac{\partial G}{\partial u} - u \frac{\partial G}{\partial v}, \\ x \frac{\partial G}{\partial z} - z \frac{\partial G}{\partial x} = w \frac{\partial G}{\partial u} - u \frac{\partial G}{\partial w}, \\ y \frac{\partial G}{\partial z} - z \frac{\partial G}{\partial y} = w \frac{\partial G}{\partial v} - v \frac{\partial G}{\partial w}. \end{cases}$$

Застосовуючи лему 4.2.1 для першого рівняння, отримуємо:

$$\begin{aligned} x \frac{\partial G}{\partial y} - y \frac{\partial G}{\partial x} &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} - y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} \right) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} (n B_{m+1, n-1, k}(x, y, z) - m B_{m-1, n+1, k}(x, y, z)) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \\ &= v \sum_{m,n,k=0}^{\infty} (B_{m+1, n-1, k}(x, y, z)) \frac{u^m v^{n-1} w^k}{m! (n-1)! k!} - \\ &\quad - u \sum_{m,n,k=0}^{\infty} (B_{m-1, n+1, k}(x, y, z)) \frac{u^{m-1} v^n w^k}{(m-1)! n! k!} = \\ &= v \frac{\partial G}{\partial u} - u \frac{\partial G}{\partial v}. \end{aligned}$$

Отже, породжуюча функція G задовольне таке диференціальне рівняння в частинних похідних

$$x \frac{\partial G}{\partial y} - y \frac{\partial G}{\partial x} = v \frac{\partial G}{\partial u} - u \frac{\partial G}{\partial v}.$$

Два інших рівняння отримуються аналогічно.

Система трьох диференціальних рівнянь, яка містить функцію шести змінних, не може мати більше трьох функціонально незалежних розв'язків [27]. Але ми можемо вказати відразу на три таких розв'язки:

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad u^2 + v^2 + w^2, \quad xu + yv + zw.$$

Отже, G є функцією $x^2 + y^2 + z^2$, $u^2 + v^2 + w^2$, $xu + yv + zw$, що мало бути доведено.

\Leftarrow *Достатність.* Припустимо тепер, що

$$G = G(xu + yv + zw, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2).$$

Тоді має місце така тотожність:

$$\begin{aligned} T_{\alpha, \beta, \gamma}(G(xu + yv + zw, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2)) &= \\ &= G(x\bar{u} + y\bar{v} + z\bar{w}, x^2 + y^2 + z^2, \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2), \end{aligned}$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} = (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma)u + \\ \quad + (\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma)v + \sin \beta \sin \gamma w, \\ \bar{v} = (-\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)u + \\ \quad + (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma)v + \sin \beta \cos \gamma w, \\ \bar{w} = \sin \alpha \sin \beta u - \cos \alpha \sin \beta v + \cos \beta w. \end{array} \right.$$

Прямим розрахунком отримуємо:

$$\begin{aligned}
T_{\alpha,\beta,\gamma}(xu + yv + zw) &= ((\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma)x + \\
&+ (-\cos \alpha \sin \gamma - \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma)y + \sin \alpha \sin \beta z)u + \\
&+ ((\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma)x + (-\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)y - \\
&- \cos \alpha \sin \beta z)v + (\sin \beta \sin \gamma x + \sin \beta \cos \gamma y + \cos \beta z)w = x\bar{u} + y\bar{v} + z\bar{w}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = T_{-\alpha, -\beta, -\gamma}(u, v, w).$$

Крім того, ортогональність $SO(3)$ передбачає, що

$$u^2 + v^2 + w^2 = \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2.$$

Тепер з одного боку маємо (ми відкинули аргументи (x, y, z) для скорочення позначень)

$$\begin{aligned}
T_{\alpha,\beta,\gamma}(G(xu + yv + zw, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2)) &= \\
&= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} T_{\alpha,\beta,\gamma}(B_{m,n,k}) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},
\end{aligned}$$

а з іншого боку отримуємо

$$\begin{aligned}
T_{\alpha,\beta,\gamma}(G) &= T_{\alpha,\beta,\gamma}(G(x\bar{u} + y\bar{v} + z\bar{w}, x^2 + y^2 + z^2, \bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)) = \\
&= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k} \frac{\bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}^k}{m! n! k!}.
\end{aligned}$$

Таким чином

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} T_{\alpha,\beta,\gamma}(B_{m,n,k}) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k} \frac{\bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}^k}{m! n! k!}.$$

Потрібно знайти вираз для $T_{\alpha,\beta,\gamma}(B_{m,n,k})$. Можна було б розкрити вирази для $\bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}^k$, виразити результат через $u^m v^n w^k$, а потім прирівняти відповідні коефіцієнти. Однак, проведемо доведення іншим шляхом. Перепишемо цю тотожність для часткового випадку многочленів $B_{m,n,k}(x, y, z) = x^m y^n z^k$. Це можна зробити, оскільки в цьому випадку породжуюча функція має необхідну форму:

$$G = e^{xu+yv+zw}.$$

Маємо

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} T_{\alpha,\beta,\gamma}(x^m y^n z^k) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} x^m y^n z^k \frac{\bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}^k}{m! n! k!}.$$

Оскільки, за означенням

$$\begin{aligned} & T_{\alpha,\beta,\gamma}(x^m \cdot y^n \cdot z^k) = \\ &= \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) x^{m_1+n_1+k_1} y^{m_2+n_2+k_2} z^{m_3+n_3+k_3}. \end{aligned}$$

Тоді, розкриваючи дужки та повертаючись до змінних u, v, w , отримуємо:

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n,k=0}^{\infty} x^m y^n z^k \frac{\bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}^k}{m! n! k!} = \\ &= \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) x^{m_1+n_1+k_1} y^{m_2+n_2+k_2} z^{m_3+n_3+k_3} \right) \times \\ & \qquad \qquad \qquad \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

З іншого боку, розкриваючи дужки та повертаючись до змінних u, v, w у виразі:

$$\sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k} \frac{\bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}^k}{m! n! k!}.$$

Оскільки $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ не залежать від x, y, z , то маємо отримати вираз такого ж вигляду:

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k} \frac{\bar{u}^m \bar{v}^n \bar{w}^k}{m! n! k!} = \\ & = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) B_{m_1+n_1+k_1, m_2+n_2+k_2, m_3+n_3+k_3} \right) \times \\ & \quad \times \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

Порівнюючи коефіцієнти степенів u, v, w у цих виразах, можна отримати вираз для $T_{\alpha, \beta, \gamma}(B_{m,n,k})$:

$$T_{\alpha, \beta, \gamma}(B_{m,n,k}) = \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=m \\ n_1+n_2+n_3=n \\ k_1+k_2+k_3=k}} C(\alpha, \beta, \gamma, m_1, \dots, k_3) B_{m_1+n_1+k_1, m_2+n_2+k_2, m_3+n_3+k_3}.$$

Таким чином, елементи групи $SO(3)$ діють на $B_{m,n,k}$ так само, як і на мономи $x^m y^n z^k$. Отже, сім'я $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною, що і потрібно було довести. \square

Розглянемо наступний приклад.

Приклад 4.2.1. Сім'я $H_{m,n,k}(x, y, z) = H_m(x)H_n(y)H_k(z)$, де $H_n(x)$ — многочлени Ерміта, є квазі-мономіальною.

Дійсно, оскільки експоненціальні породжуючі функції многочленів Ерміта від x, y , та z мають вигляд

$$e^{2xu-u^2} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) \frac{u^m}{m!}, \quad e^{2yv-v^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) \frac{v^n}{n!}, \quad e^{2zw-w^2} = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(z) \frac{w^k}{k!},$$

то експоненціальна породжуюча функція для $H_{m,n,k}(x, y, z)$ має форму:

$$e^{2xu-u^2} e^{2yv-v^2} e^{2zw-w^2} = e^{2(xu+yv+zw)-(u^2+v^2+w^2)}.$$

А тоді, згідно з теоремою 4.2.1, сім'я $H_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономіальною.

Властивість квазі-мономіальності потенційно може зникнути, якщо многочлени нормалізувати, що є звичайною практикою для підтримки діапазону значень у розумних межах.

У статті [6] авторами було досліджено, який тип масштабування зберігає властивість квазі-мономіальності відносно групи обретаць $SO(2)$. Зокрема, авторами доведено, що, якщо сім'я $\{B_{m,n}(x, y)\}$ є квазі-мономіальною, то сім'я многочленів $\{\tilde{B}_{m,n}(x, y)\}$ така, що

$$\tilde{B}_{m,n}(x, y) = \alpha_{m,n} B_{m,n}(x, y), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

буде квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n}$ є довільною функцією однієї змінної $m + n$, для всіх $m, n \in \mathbb{N}$.

Розширючи думку авторів, встановлюємо умови, за яких нормалізація многочленів відносно групи обретаць простору $SO(3)$ зберігає властивість квазі-мономіальності. Наступна теорема досліджує тип нормалізації, який підтримує властивість квазі-мономіальності.

Теорема 4.2.2. *Припустимо, що сім'я $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною. Сім'я многочленів $\{\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)\}$ така, що*

$$\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} B_{m,n,k}(x, y, z), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

буде квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є довільною функцією однієї змінної $m + n + k$:

$$\alpha_{m,n,k} = \varphi(m + n + k),$$

для всіх $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Доведення. \implies Необхідність. Якщо $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономіальною, то вона задовольняє тотожності Леми 4.2.1.

Отримуємо:

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y} - y \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} = \\ & = n \tilde{B}_{m+1,n-1,k}(x,y,z) - m \tilde{B}_{m-1,n+1,k}(x,y,z). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial y} - y \frac{\partial B_{m,n,k}(x,y,z)}{\partial x} = \\ & = n \frac{\alpha_{m+1,n-1,k}}{\alpha_{m,n,k}} B_{m+1,n-1,k}(x,y,z) - m \frac{\alpha_{m-1,n+1,k}}{\alpha_{m,n,k}} B_{m-1,n+1,k}(x,y,z). \end{aligned}$$

З цього можемо зробити висновок, що

$$\frac{\alpha_{m+1,n-1,k}}{\alpha_{m,n,k}} = 1 \text{ та } \frac{\alpha_{m-1,n+1,k}}{\alpha_{m,n,k}} = 1.$$

Виконавши це для кожної тотожності, отримаємо систему рекурентних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{m+1,n-1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m-1,n+1,k} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m+1,n,k-1} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m-1,n,k+1} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n-1,k+1} = \alpha_{m,n,k}, \\ \alpha_{m,n+1,k-1} = \alpha_{m,n,k}. \end{array} \right.$$

Легко бачити, що розв'язком системи є $\alpha_{m,n,k} = \varphi(m+n+k)$, де φ — довільна функція. Справді, розглянемо довільний індекс (m, n, k) . Можемо отримати індекс $(0, 0, m+n+k)$ через низку перетворень, як показано нижче. Спочатку зменшуючи m та одночасно збільшуючи n до $m = 0$:

$$\alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{m,n,k}.$$

Потім зменшуючи n , збільшуючи k до $n = 0$:

$$\alpha_{0,0,m+n+k} = \alpha_{0,n+m,k}.$$

В результаті маємо:

$$\alpha_{m,n,k} = \alpha_{0,n+m,k} = \alpha_{0,0,m+n+k}.$$

Тепер можемо визначити функцію $\varphi(x) = \alpha_{0,0,x}$. Тоді

$$\alpha_{m,n,k} = \varphi(m + n + k),$$

показуючи, що будь-який розв'язок системи є функцією змінної $m + n + k$.

\Leftarrow *Достатність.* Доведемо зворотню імплікацію. Припустимо тепер, що $B_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономіальною, а коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ є довільною функцією φ однієї змінної $m + n + k$, тобто $\alpha_{m,n,k} = \varphi(m + n + k)$.

Треба довести, що сім'я

$$\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \varphi(m + n + k)B_{m,n,k}(x, y, z)$$

є квазі-мономіальною. Для цього спершу перевіримо, що $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ задовольняє тотожність наведеної вище леми 4.2.1. Беручи до уваги квазі-мономіальність $B_{m,n,k}(x, y, z)$, маємо

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} - y \frac{\partial \tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} = \\ & = \varphi(m+n+k) \left(x \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial y} - y \frac{\partial B_{m,n,k}(x, y, z)}{\partial x} \right) = \\ & = \varphi(m + n + k) (nB_{m+1,n-1,k}(x, y, z) - mB_{m-1,n+1,k}(x, y, z)) = \\ & = n\varphi((m+1)+(n-1) + k)B_{m+1,n-1,k}(x, y, z) - \\ & - m\varphi((m-1) + (n+1) + k)B_{m-1,n+1,k}(x, y, z) = \\ & = n\tilde{B}_{m+1,n-1,k}(x, y, z) - m\tilde{B}_{m-1,n+1,k}(x, y, z). \end{aligned}$$

Так само можемо перевірити дві інші тотожності. З теореми 4.2.1 тепер випливає, що сім'я $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)$ є квазі-мономіальною сім'єю. \square

У наступних пунктах буде розглянуто два приклади квазі-мономіальних сімей многочленів – многочленів Аппеля.

4.3. Многочлени Аппеля від трьох змінних

Розглянемо дві сім'ї многочленів $\{V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)\}$ і $\{U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)\}$, визначені експоненціальними породжуючими функціями:

$$\frac{1}{(1 - 2(xu + yv + zw) + u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{2+s}{2}}} = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{((1 - (ux + vy + wz))^2 - (u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1))^{\frac{s}{2}}} = \\ & = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}. \end{aligned}$$

Ці многочлени називаються **многочленами Аппеля** типу V та U .

Вперше ці многочлени з'явилися у роботах Ерміта, Дідона, Аппеля та Кампе де Феріє [4, 15, 18, 23, 28].

Як безпосередньо впливає з Теорема 4.2.1, ці сім'ї многочленів Аппеля є квазі-мономіальними. Явні формули (з точністю до постійного множника $m!n!k!$) для многочленів наведено в [17, с.42, с.45].

Після спрощення отримуємо вирази:

$$\begin{aligned} & V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) = \\ & = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{t} \frac{(1 + \frac{s}{2})_{m+n+k-i-j-t} (i-m)_i (j-n)_j (t-k)_t}{2^{2(i+j+t)-(m+n+k)}} \times \\ & \quad \times x^{m-2i} y^{n-2j} z^{k-2t}, \end{aligned}$$

$$U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z) =$$

$$\begin{aligned}
&= (2s-1)_{m+n+k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{t=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{i+j+t} (-m)_{2i} (-n)_{2j} (-k)_{2t}}{2^{2(i+j+t)} i! j! t! (s)_{i+j+t}} \times \\
&\quad \times x^{m-2i} y^{n-2j} z^{k-2t} (1-x^2-y^2-z^2)^{i+j+t}.
\end{aligned}$$

Тут $(x)_n$ — символ Похгаммера:

$$(x)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1), & n > 0. \end{cases}$$

Нижче наведено деякі перші такі многочлени для випадку $s = 1$:

$$V_{0,0,0} = 1, \quad V_{1,0,0} = 3x, \quad V_{0,1,0} = 3y, \quad V_{0,0,1} = 3z,$$

$$V_{2,0,0} = 15x^2 - 3, \quad V_{0,2,0} = 15y^2 - 3,$$

$$V_{1,1,0} = 15xy, \quad V_{1,0,1} = 15xz, \quad V_{0,1,1} = 15yz,$$

$$V_{3,0,0} = 105x^3 - 45x, \quad V_{2,1,0} = 105x^2y - 15y.$$

$$U_{0,0,0} = 1, \quad U_{1,0,0} = x, \quad U_{0,1,0} = y, \quad U_{0,0,1} = z,$$

$$U_{2,0,0} = 3x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad U_{0,0,2} = x^2 + y^2 + 3z^2 - 1,$$

$$U_{1,1,0} = 2xy, \quad U_{1,0,1} = 2xz, \quad U_{0,1,1} = 2yz,$$

$$U_{3,0,0} = 15x^3 + 9xy^2 + 9xz^2 - 9x, \quad U_{2,1,0} = 9x^2y + 3y^3 + 3yz^2 - 3y.$$

Многочлени Аппеля є біортогональними на сфері B^3 з ваговою функцією

$$w_s(x, y, z) = (1 - (x^2 + y^2 + z^2))^{\frac{s-1}{2}}.$$

Зокрема, для $s = 1$, використовуючи результат [15, р.262], отримуємо:

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} V_{m,n,k}(x, y, z) U_{m',n',k'}(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \frac{4\pi(m+n+k)!m!n!k!}{2(m+n+k)+3} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \delta_{k,k'}.$$

Під час чисельного обчислення многочленів Аппеля за допомогою явних формул можемо зіткнутися з втратою точності через переповнення чи недоповнення числа з плаваючою комою. Для многочленів Аппеля ці рекурентні співвідношення можна використовувати для забезпечення ефективних і стабільних обчислень. Виведемо явні рекурентні співвідношення для многочленів Аппеля. Зауважимо, що ці формули без доведення вперше були наведені в [21].

У наступних двох теоремах представлені рекурентні співвідношення для многочленів Аппеля, які були використані для їх ефективного та стабільного обчислення.

Теорема 4.3.1. *Многочлени $\{U_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)\}$ задовольняють наступні рекурентні співвідношення*

$$\begin{aligned} U_{m+1,n,k} &= x(2m+n+k+1)U_{m,n,k} + \\ &+ kmxzU_{m,n,k-1} + mnxyU_{m,n-1,k} + 2kmnxyzU_{m,n-1,k-1} + \\ &+ m((y^2+z^2-1)m + (y^2+2z^2-1)k + (2y^2+z^2-1)n)U_{m-1,n,k} + \\ &+ mkz((y^2-1)(m+k-1) + (3y^2-1)n)U_{m-1,n,k-1} + \\ &+ mny((3z^2-1)k + (z^2-1)(m+n-1))U_{m-1,n-1,k} - \\ &- 2kmnyz(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{m,n+1,k} &= y(m+2n+k+1)U_{m,n,k} + knyzU_{m,n,k-1} + \\
&+ mnxyU_{m-1,n,k} + 2kmnxyzU_{m-1,n,k-1} + \\
&+ n((x^2+z^2-1)n + (x^2+2z^2-1)k + (2x^2+z^2-1)m)U_{m,n-1,k} + \\
&+ nkz((x^2-1)(k+n-1) + (3x^2-1)m)U_{m,n-1,k-1} + \\
&+ mnx((3z^2-1)k + (z^2-1)(m+n-1))U_{m-1,n-1,k} - \\
&- 2kmnxz(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{m,n,k+1} &= z(m+n+2k+1)U_{m,n,k} + kmxzU_{m-1,n,k} + \\
&+ knzyU_{m,n-1,k} + 2kmnxyzU_{m-1,n-1,k} + \\
&+ k((x^2+y^2-1)k + (2x^2+y^2-1)m + (x^2+2y^2-1)n)U_{m,n,k-1} + \\
&+ mkx((y^2-1)(m+k-1) + (3y^2-1)n)U_{m-1,n,k-1} + \\
&+ kny((x^2-1)(k+n-1) + (3x^2-1)m)U_{m,n-1,k-1} - \\
&- 2ktnyx(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1},
\end{aligned}$$

з початковими умовами $U_{0,0,0} = 1$ та $U_{m,n,k} = 0$, якщо хоча б один з індексів від'ємний.

Доведення. Пряма перевірка показує, що

$$-2f \frac{\partial G}{\partial u} = f_u G,$$

де

$$f = (1 - (ux + vy + wz))^2 - (u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1), \quad f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad G = \frac{1}{\sqrt{f}}.$$

Припустимо, що існує тотожність виду

$$g_1 \frac{\partial G}{\partial u} + g_2 \frac{\partial G}{\partial v} + g_3 \frac{\partial G}{\partial w} + g_4 G = 0,$$

для деяких многочленів g_1, g_2, g_3, g_4 від x, y, z . Помножимо її на $-2f$ і після скорочення на G отримаємо

$$g_1 f_u + g_2 f_v + g_3 f_w - 2f g_4 = 0.$$

Припустимо, що g_i — многочлени 2-го степеня. Можна розв'язати поліноміальне рівняння та знайти 4 лінійно незалежні розв'язки, кожен з яких задає диференціальне рівняння. Опускаємо обчислення та наводимо лише отримані диференціальні тотожності:

$$\begin{aligned} x \left(2u \frac{\partial G}{\partial u} + v \frac{\partial G}{\partial v} + w \frac{\partial G}{\partial w} + G \right) + uy \frac{\partial G}{\partial v} + uz \frac{\partial G}{\partial w} = \\ = Gu + (u^2 + 1) \frac{\partial G}{\partial u} + uv \frac{\partial G}{\partial v} + uw \frac{\partial G}{\partial w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \left(u \frac{\partial G}{\partial u} + 2v \frac{\partial G}{\partial v} + w \frac{\partial G}{\partial w} + G \right) + xv \frac{\partial G}{\partial u} + vz \frac{\partial G}{\partial w} = \\ = Gv + uv \frac{\partial G}{\partial u} + (v^2 + 1) \frac{\partial G}{\partial v} + vw \frac{\partial G}{\partial w}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xw \frac{\partial G}{\partial u} + wy \frac{\partial G}{\partial v} + z \left(u \frac{\partial G}{\partial u} + v \frac{\partial G}{\partial v} + 2w \frac{\partial G}{\partial w} + G \right) = \\ = Gw + uw \frac{\partial G}{\partial u} + vw \frac{\partial G}{\partial v} + (w^2 + 1) \frac{\partial G}{\partial w}. \end{aligned}$$

Будь-яка така диференціальна тотожність передбачає деяке рекурентне співвідношення для $V_{m,n,k}(x, y, z)$ та її похідних. Наприклад, якщо розпишемо ліву частину першої тотожності

$$x \left(2u \frac{\partial G}{\partial u} + v \frac{\partial G}{\partial v} + w \frac{\partial G}{\partial w} + G \right) + uy \frac{\partial G}{\partial v} + uz \frac{\partial G}{\partial w},$$

записуючи G та її похідні у вигляді рядів через u, v, w (подібно до доведення Теорема 4.2.1), отримуємо ряд із таким загальним членом:

$$(x(2m + n + k + 1)U_{m,n,k}(x, y, z) + m(yU_{m-1,n+1,k}(x, y, z) + zU_{m-1,n,k+1}(x, y, z))).$$

Подібним чином, шляхом перетворення лівої сторони цього рівняння отримуємо:

$$G u + (u^2 + 1) \frac{\partial G}{\partial u} + uv \frac{\partial G}{\partial v} + uw \frac{\partial G}{\partial w} = \frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial(u^2 G)}{\partial u} + uv \frac{\partial G}{\partial v} + uw \frac{\partial G}{\partial w} - G u,$$

отримуємо ряд із наступним загальним членом:

$$\begin{aligned} U_{m+1,n,k} + m(m-1)U_{m-1,n,k} + mnV_{m-1,n,k} + mkU_{m-1,n,k} - mU_{m-1,n,k} = \\ = m(m+n+k)U_{m-1,n,k} + U_{m+1,n,k}. \end{aligned}$$

Прирівнявши ліву і праву частини, отримаємо наступне рекурентне рівняння

$$\begin{aligned} x(2m+n+k+1)U_{m,n,k} + m(yU_{m-1,n+1,k} + zU_{m-1,n,k+1}) = \\ = m(m+n+k)U_{m-1,n,k} + U_{m+1,n,k}. \end{aligned}$$

Подібні міркування дають нам ще два рекурентних рівняння:

$$\begin{aligned} y(m+2n+k+1)U_{m,n,k} + n(xU_{m+1,n-1,k} + zU_{m,n-1,k+1}) = \\ = n(m+n+k)U_{m,n-1,k} + U_{m,n+1,k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(m+n+2k+1)U_{m,n,k} + k(xU_{m+1,n,k-1} + yU_{m,n+1,k-1}) = \\ = k(m+n+k)U_{m,n,k-1} + U_{m,n,k+1}. \end{aligned}$$

Отримані рекурентні рівняння ще не придатні для обчислення значень многочленів, тому їх необхідно перетворити у вигляд:

$$U_{m+1,n,k} = \text{Вираз } U \text{ з індексами меншими ніж } (m+1, n, k).$$

Усі подальші перетворення спрямовані на поступове перетворення цих рекурентних рівнянь у потрібну форму.

Виконуючи зсув індексу $m \mapsto m - 1$ до двох останніх тотожностей, ми отримуємо кілька нових рівнянь:

$$\begin{aligned} y(m+2n+k)U_{m-1,n,k} + n(xU_{m,n-1,k} + zU_{m-1,n-1,k+1}) &= \\ &= n(m-1+n+k)U_{m-1,n-1,k} + U_{m-1,n+1,k}, \\ z(m+n+2k)U_{m-1,n,k} + k(xU_{m,n,k-1} + yU_{m-1,n+1,k-1}) &= \\ &= k(m-1+n+k)U_{m-1,n,k-1} + U_{m-1,n,k+1}, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} U_{m-1,n+1,k} &= y(m+2n+k)U_{m-1,n,k} + n(xU_{m,n-1,k} + zU_{m-1,n-1,k+1}) - \\ &\quad - n(m-1+n+k)U_{m-1,n-1,k}, \\ U_{m-1,n,k+1} &= z(m+n+2k)U_{m-1,n,k} + k(xU_{m,n,k-1} + yU_{m-1,n+1,k-1}) - \\ &\quad - k(m-1+n+k)U_{m-1,n,k-1}. \end{aligned}$$

Підставимо його в перше отримане рівняння:

$$\begin{aligned} U_{m+1,n,k} &= x(2m+n+k+1)U_{m,n,k} + kmxzU_{m,n,k-1} + mnxyU_{m,n-1,k} + \\ &\quad + m((y^2+z^2-1)m + (y^2+2z^2-1)k + (2y^2+z^2-1)n)U_{m-1,n,k} - \\ &\quad - m(m+n+k-1)(kzU_{m-1,n,k-1} + nyU_{m-1,n-1,k}) + \\ &\quad + kmzyU_{m-1,n+1,k-1} + mnzyU_{m-1,n-1,k+1}. \end{aligned}$$

Отриманий вираз ще не досяг потрібного вигляду, оскільки в правій частині все ще містяться набори індексів

$$(m-1, n+1, k-1), (m-1, n-1, k+1),$$

в яких присутні індекси $n+1$ та $k+1$.

Ще раз виконуємо зсув індексу для останніх двох рівнянь:

$$U_{m-1,n+1,k-1} = y(m+2n+k-1)U_{m-1,n,k-1} + \\ + n(xU_{m,n-1,k-1} + zU_{m-1,n-1,k}) - n(m-2+n+k)U_{m-1,n-1,k-1},$$

$$U_{m-1,n-1,k+1} = z(m+n+2k-1)U_{m-1,n-1,k} + \\ + k(xU_{m,n-1,k-1} + yU_{m-1,n,k-1}) - k(m-2+n+k)U_{m-1,n-1,k-1}.$$

Після виключення $U_{m-1,n+1,k-1}$ та $U_{m-1,n-1,k+1}$ отримуємо:

$$U_{m+1,n,k} = x(2m+n+k+1)U_{m,n,k} + kmxzU_{m,n,k-1} + \\ + mnxyU_{m,n-1,k} + 2kmnxyzU_{m,n-1,k-1} + \\ + m((y^2+z^2-1)m + (y^2+2z^2-1)k + (2y^2+z^2-1)n)U_{m-1,n,k} + \\ + mkz((y^2-1)(m+k-1) + (3y^2-1)n)U_{m-1,n,k-1} + \\ + mny((3z^2-1)k + (z^2-1)(m+n-1))U_{m-1,n-1,k} - \\ - 2kmnyz(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1}.$$

Нарешті отримали шуканий вираз для $U_{m+1,n,k}$.

Подібні обчислення, які опускаємо, дають наступні рекурентні співвідношення для другого та третього індексів:

$$U_{m,n+1,k} = y(m+2n+k+1)U_{m,n,k} + knyzU_{m,n,k-1} + \\ + mnxyU_{m-1,n,k} + 2kmnxyzU_{m-1,n,k-1} + \\ + n((x^2+z^2-1)n + (x^2+2z^2-1)k + (2x^2+z^2-1)m)U_{m,n-1,k} + \\ + nkz((x^2-1)(k+n-1) + (3x^2-1)m)U_{m,n-1,k-1} + \\ + mnx((3z^2-1)k + (z^2-1)(m+n-1))U_{m-1,n-1,k} - \\ - 2kmnxyz(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1},$$

Також

$$\begin{aligned}
U_{m,n,k+1} &= z(m+n+2k+1)U_{m,n,k} + \\
&+ kmxzU_{m-1,n,k} + knzyU_{m,n-1,k} + 2kmnxyzU_{m-1,n-1,k} + \\
&+ k((x^2+y^2-1)k + (2x^2+y^2-1)m + (x^2+2y^2-1)n)U_{m,n,k-1} + \\
&+ mkx((y^2-1)(m+k-1) + (3y^2-1)n)U_{m-1,n,k-1} + \\
&+ kny((x^2-1)(k+n-1) + (3x^2-1)m)U_{m,n-1,k-1} - \\
&- 2kmnux(m+n+k-2)U_{m-1,n-1,k-1}.
\end{aligned}$$

□

Рекурентні співвідношення для многочленів $V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)$ виявилися простішими і вдалося отримати формули для довільного s . Спосіб їх виведення аналогічний. Тому наведемо лише кінцевий результат.

Теорема 4.3.2. *Многочлени $V_{m,n,k}^{(s)}(x, y, z)$ задовольняють п'ятичленні рекурентні співвідношення:*

$$\begin{aligned}
(2(1+m+n+k) + s)xV_{m,n,k}(x, y, z) &= \\
&= V_{m+1,n,k}(x, y, z) - n(n-1)V_{m+1,n-2,k}(x, y, z) - \\
&- k(k-1)V_{m+1,n,k-2}(x, y, z) + m(m+2n+2k+1+s)V_{m-1,n,k}(x, y, z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2(1+m+n+k) + s)yV_{m,n,k}(x, y, z) &= \\
&= V_{m,n+1,k}(x, y, z) - m(m-1)V_{m-2,n+1,k}(x, y, z) - \\
&- k(k-1)V_{m,n+1,k-2}(x, y, z) + n(n+2m+2k+1+s)V_{m,n-1,k}(x, y, z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2(1+m+n+k) + s)zV_{m,n,k}(x, y, z) = \\
& = V_{m,n,k+1}(x, y, z) - m(m-1)V_{m-2,n,k+1}(x, y, z) - \\
& - n(n-1)V_{m,n-2,k+1}(x, y, z) + k(k+2m+2n+1+s)V_{m,n,k-1}(x, y, z),
\end{aligned}$$

з початковими умовами:

$$V_{0,0,0}(x, y, z) = 1, \quad V_{1,0,0}(x, y, z) = (s+2)x, \quad V_{0,1,0}(x, y, z) = (s+2)y,$$

$$V_{2,0,0}(x, y, z) = (s+2)(x^2s + 4x^2 - 1), \quad V_{1,1,0}(x, y, z) = xy(s+4)(s+2).$$

4.4. Застосування квазі-мономів

Отримані в ході дослідження результати дають більш глибоке розуміння квазі-мономів та їхніх властивостей, розширюючи можливості подальших теоретичних і прикладних розробок у різних галузях. Насамперед, це стосується задач аналізу зображень і розпізнавання 3D-об'єктів, де інваріантність до афінних перетворень є надзвичайно важливою. З боку чистої математики, знайдені властивості квазі-мономів представляють інтерес у комбінаториці, теорії груп та теорії спеціальних функцій.

Окрім суто математичної цінності, ці результати можуть стати базою для побудови нових алгоритмів машинного навчання — зокрема, нейронних мереж, що прямо інтегрують квазі-мономіальні характеристики у свої шари. Такий підхід зменшує необхідність великомасштабної аугментації та забезпечує більшу робастність до змін орієнтації чи масштабу об'єктів. У контексті теорії розпізнавання образів та аналізу зображень результати дають змогу формувати ефективні ротаційно чи афінно інваріантні ознаки, істотно покращуючи точність і швидкість обробки даних.

Наведемо основні галузі застосування квазі-мономів:

- 1) *Комбінаторика*: вивчення структури, породження та симетрій в алгебраїчних об'єктах.
- 2) *Теорія груп*: аналіз інваріантів відносно дій груп перетворень (афінних, ортогональних тощо).
- 3) *Теорія спеціальних функцій*: зв'язок з породжуючими функціями, ортогональністю, рекурентними співвідношеннями.
- 4) *Аналіз зображень*: формування інваріантних ознак для об'єктів на зображеннях; зменшення чутливості до ротацій, масштабування, афінних перетворень.
- 5) *Розпізнавання 3D-об'єктів*: використання афінно-інваріантних характеристик для стабільного розпізнавання форм у тривимірному просторі.
- 6) *Машинне навчання*: побудова нейронних мереж із вбудованими квазі-мономіальними шарами; зменшення потреби в аугментації даних; підвищення робастності моделей до змін орієнтації чи масштабу об'єктів.
- 7) *Теоретична фізика та квантова механіка*: опис симетрій, інваріантів, можливо — інтегрування у квантово-механічні моделі з афінною або ротаційною симетрією.
- 8) *Обробка сигналів*: виділення інваріантних характеристик сигналів під час фільтрації або декомпозиції.
- 9) *Робототехніка та комп'ютерний зір*: розпізнавання об'єктів та навігація з урахуванням змін перспективи та масштабу.
- 10) *Геометричне моделювання та САД-системи*: створення геометрично стабільних інваріантних дескрипторів форм.
- 11) *Штучний інтелект в медицині*: інваріантний аналіз медичних зображень (рентген, МРТ), де об'єкти мають різне розташування й масштаб.
- 12) *Криптографія та теорія інформації*: конструювання інваріантних хеш-функцій або ключів на базі математичних інваріантів.
- 13) *Аналіз даних у біоінформатиці*: розпізнавання структур білків,

ДНК, які мають просторові симетрії.

Подальші дослідження можуть включати аналіз інших груп перетворень та додаткових характеристик квазі-мономіальних систем, що ще більше розширить спектр застосувань. Зокрема, вони можуть дати нові перспективи і в області теоретичної фізики та квантової механіки, де подібні методи використовуються для опису симетрій та інваріантів. Таким чином, отримані результати є важливими та актуальними для широкого кола напрямів — від машинного навчання і прикладної математики до фундаментальних питань групового та функціонального аналізу.

У четвертому розділі виконано детальне теоретичне та прикладне дослідження сімей многочленів від трьох змінних, які мають властивість квазі-мономіальності відносно спеціальної ортогональної групи $SO(3)$. Проведений аналіз дозволив встановити фундаментальні закономірності побудови таких сімей та розробити математичний апарат для їхнього практичного застосування в задачах аналізу 3D-об'єктів.

Обґрунтовано доцільність використання квазі-мономіальних базисів як альтернативи стандартному мономіальному базису при побудові моментних інваріантів. На основі аналізу матричної реалізації групи $SO(3)$, що визначається через кути Ейлера α, β, γ , та відповідних перетворень координат x', y', z' , сформульовано критерій квазі-мономіальності. Доведено, що необхідною і достатньою умовою квазі-мономіальності сім'ї многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ відносно групи обертань $SO(3)$ є представлення її експоненціальної породжуючої функції G як функції трьох специфічних аргументів – скалярного добутку векторів координат та параметрів $ux + vy + wz$, а також квадратів їхніх довжин $x^2 + y^2 + z^2$ та $u^2 + v^2 + w^2$:

$$G = G(x, y, z, u, v, w) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!},$$

Математично підтверджено, що породжуюча функція квазі-мономіальної сім'ї задовольняє систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, що пов'язують оператори диференціювання за просторовими змінними та за параметрами u, v, w . Це дозволило довести тотожність дії операторів групи обертань на досліджувані многочлени та на відповідні мономи, що є ключовим для збереження форми алгебраїчних інваріантів.

Окрему увагу приділено дослідженню стабільності властивості квазі-мономіальності при нормалізації многочленів. Встановлено, що сім'я многочленів $\{\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z)\}$ така, що $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} B_{m,n,k}(x, y, z)$, де $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ – квазі-мономіальна сім'я, буде квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт $\alpha_{m,n,k}$ залежить від сумарних степенів многочленів $m + n + k$: $\alpha_{m,n,k} = \varphi(m + n + k)$. Це дозволяє впроваджувати процедури масштабування значень многочленів без порушення їхньої інваріантної форми.

Досліджено властивості біортогональних многочленів Аппеля типів V та U , що визначені на сфері B^3 з ваговою функцією:

$$w_s(x, y, z) = (1 - (x^2 + y^2 + z^2))^{\frac{s-1}{2}}.$$

Доведено, що ці сім'ї належать до класу $SO(3)$ -квазі-мономів, що підтверджується структурою їхніх породжуючих функцій. На основі розроблених диференціальних тотожностей виведено трьохпараметричні рекурентні співвідношення для многочленів Аппеля. Застосування цих співвідношень замість прямих обчислень через символ Похгаммера та багатовимірні суми забезпечує стабільність обчислень та запобігає втраті точності.

Результати розділу створюють математичне підґрунтя для побудови систем моментних інваріантів у тривимірному просторі, які є стійкими до обертань навколо початку координат. Майбутні дослідження можуть стосуватися

досліджень інших груп перетворень і додаткових властивостей квазі-мономів, далі розширюючи їхнє застосування.

Результати розділу опубліковані у працях [3, 43, 44].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено комплексне теоретичне дослідження та розроблено математичний апарат побудови сімей многочленів від двох та трьох змінних, що мають властивість квазі-мономіальності відносно підгруп афінних груп площини $\text{Aff}(2)$ та простору $\text{Aff}(3)$. Отримані результати дозволяють розв'язати проблему поєднання обчислювальної стабільності поліноміальних базисів із аналітичною простотою моментних інваріантів.

На основі проведеного аналізу зроблено наступні висновки.

1. Розвинено концепцію квазі-мономіальності для підгруп афінних перетворень. Ключовою особливістю квазі-мономіальних базисів $\{B_{m,n,[k]}\}$ є ідентичність матричної реалізації операторів відповідних груп перетворень тій формі, яку вони мають у стандартному мономіальному базисі $\{x^m y^n [z^k]\}$.

2. Здійснено повний опис квазі-мономіальних сімей відносно основних підгруп групи $\text{Aff}(2)$. Сформульовано критерії квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій G :

- для групи обертань $SO(2)$ функція залежить від аргументів $ux + vy$, $x^2 + y^2$ та $u^2 + v^2$;
- для групи масштабувань — від xu та yv ;
- для групи рівномірних масштабувань — від $\frac{y}{x}$, ux та vx ;
- для групи паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(u, v)e^{xu+yv}$, де $C(u, v)$ — деякий степеневий ряд;
- для групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(x - y, u, v)e^{xu+yv}$, де $C(x - y, u, v)$ — довільний степеневий ряд за змінними $x - y, u, v$.

3. Досліджено просторові квазі-мономіальні сім'ї від трьох змінних відносно підгруп афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. Встановлено необхідні й до-

статні умови квазі-мономіальності для підгруп паралельних перенесень, масштабувань та їхніх рівномірних аналогів. Зокрема, доведено, що для:

- групи паралельних перенесень породжуюча функція набуває вигляду $G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ — довільний степеневий ряд від u, v, w ;
- групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція набуває вигляду $G = C(x-y, x-z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де $C(x-y, x-z, u, v, w)$ — довільний степеневий ряд;
- групи масштабувань функція G залежить від змінних xu, yv, zw ;
- групи рівномірних масштабувань функція G залежить від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$.

4. Описано сім'ї многочленів, що є квазі-мономами відносно групи обертань простору $SO(3)$. Доведено, що для забезпечення $SO(3)$ -квазі-мономіальності експоненціальна породжуюча функція

$$G(x, y, z, u, v, w) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z) \frac{u^m v^n w^k}{m! n! k!}$$

має залежати від $ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2$ та $u^2 + v^2 + w^2$.

5. Виявлено умови збереження властивості квазі-мономіальності при нормалізації многочленів. Доведено, що для групи паралельних перенесень сім'я $\tilde{B}_{m,n}(x, y) = \alpha_{m,n} B_{m,n}(x, y)$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\alpha_{m,n}$ визначається функцією $\varphi(m+n)$, що задовольняє рекурентне співвідношення $\varphi(m+n) = \varphi(m+n-1)$. Аналогічні результати отримано для тривимірного випадку, де функція φ задовольняє рекурентне співвідношення $\varphi(m+n+k) = \varphi(m+n+k-1)$. Це дозволяє здійснювати нормування моментів без спотворення їхніх інваріантних властивостей.

6. Доведено, що біортогональні многочлени Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами $SO(3)$. Виведено рекурентні співвідношення для цих многочленів.

7. Розроблено апарат рекурентних співвідношень для обчислення значень квазі-мономіальних многочленів високих порядків. Для узагальнених многочленів відносно групи паралельних перенесень виведено схеми, що використовують комбінаторні коефіцієнти $h_{s,k}^{(m,n)}$. Застосування цих схем замість прямих обчислень через степеневі суми підвищує чисельну стійкість алгоритмів, запобігаючи втраті точності при роботі з об'ємними даними.

Отримані результати поглиблюють теоретичні уявлення про квазі-мономи та розширюють можливості їх застосування в задачах аналізу зображень. Розроблені методи забезпечують побудову інваріантних ознак до афінних і ортогональних перетворень, що сприяє підвищенню ефективності обробки даних. Виявлені властивості мають наукову цінність у теорії груп та теорії спеціальних функцій і можуть бути використані для подальших досліджень у цих галузях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору* // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». — 2023. — Т. 42. № 1. — С. 79-89.
- [2] Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини* // Міжнародна алгебраїчна конференція «Під кінець року 2022» (Київ, Україна, 27-28 грудня 2022 р.): тези доповідей. — Київ, 2022. — С. 70.
- [3] Самарук Н. *Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору $SO(3)$* // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, Україна, 23-27 вересня 2024 р.): тези доповідей. — Чернівці, 2024. — С. 94-95.
- [4] Appell P., Kampé de Fériet J. *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques, Polynomes d'Hermite*. — Gauthier-Villars, 1926.
- [5] Bedratyuk L. *2D Geometric Moment Invariants from the Point of View of the Classical Invariant Theory* // Journal of Mathematical Imaging and Vision. — 2020. — Vol. 62 (2). — P. 1062-1075. — doi: 10.1007/s10851-020-00954-9
- [6] Bedratyuk L., Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J. *Non-separable rotation moment invariants* // Pattern Recognition. — 2022, Vol. 127(6). — 108607. — doi:10.1016/j.patcog.2022.108607
- [7] Bekkers E.J., Lafarge M.W., Veta M., Eppenhof K.A.J., Pluim J.P.W., Duits R. *Roto-translation covariant convolutional networks for medical image analysis* // 21st International Conference «MICCAI: Medical Image

- Computing and Computer Assisted Intervention» (Granada, Spain, 16-20 September 2018). – Spain, 2018. – P. 440–448. – doi: 10.1007/978-3-030-00928-1-50
- [8] Bruna J., Mallat S. *Invariant scattering convolution networks* // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2013. Vol. 35, № 8. – P. 1872–1886. – doi: 10.1109/TPAMI.2012.230
- [9] Cheng G., Zhou P., Han J. *Learning rotation-invariant convolutional neural networks for object detection in VHR optical remote sensing images* // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2016. – Vol. 54(12). – P. 7405–7415. – doi: 10.1109/TGRS.2016.2601622
- [10] Cheng G., Han J., Zhou P., Xu D. *Learning rotation-invariant and fisher discriminative convolutional neural networks for object detection* // IEEE Transactions on Image Processing. – 2018. – Vol. 28(1). – P. 265–278. – doi: 10.1109/TIP.2018.2867198
- [11] Chidester B., Ton T.-V., Tran M.-T., Ma J., Do M. *Enhanced rotation-equivariant U-Net for nuclear segmentation* // In Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Long Beach, CA, USA, 16-17 June 2019): book of abstracts. – 2019. – P. 1097–1104. – doi: 10.1109/CVPRW.2019.00143
- [12] Chidester B., Zhou T., Do M., Ma J. *Rotation equivariant and invariant neural networks for microscopy image analysis* // Bioinformatics. – 2019. – Vol. 35(14). – P. i530-i537. – doi: 10.1093/bioinformatics/btz353
- [13] Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R., *Translation and scale invariants of Legendre moments* // Pattern Recognition. – 2004. – Vol. 37, № 1. – P. 119-129.– doi: 10.1016/j.patcog.2003.06.003

- [14] Cohen T.S., Welling W. *Group equivariant convolutional networks* // Proceedings of The 33rd International Conference on Machine Learning: book of abstracts. – 2016. – P. 2990–2999. – URL: <https://proceedings.mlr.press/v48/cohenc16.pdf>
- [15] Didon F. *Étude de certaines fonctions analogues aux fonctions X_n de Legendre, etc.* Annales scientifiques de l'É.N.S. — 1868. — 1 re série, tome 5. — P. 229-310.
- [16] Ding J., Xue N., Long Y., Xia G.-S., Lu Q. *Learning roi transformer for oriented object detection in aerial images* // In Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Long Beach, CA, USA, 15-20 June 2019): book of abstracts. – 2019. – P. 2849–2858. – doi: 10.1109/CVPR.2019.00296
- [17] Dunkl C.F., Xu Y. *Orthogonal Polynomials of Several Variables* // Encyclopedia of Mathematics and its Applications. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001. — Series Number 81. — 408 p.
- [18] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F. and Tricomi F. G. *Higher Transcendental Functions*. — New York : Krieger, 1981. — Vol. 1. — P. 222-224.
- [19] Flusser J., Suk T., Zitová B. *2D and 3D Image Analysis by Moments*. — John Wiley & Sons Ltd, 2016. — 560 p. – doi: 10.1002/9781119039402.fmatter
- [20] Flusser J. *On the independence of rotation moment invariants* // Pattern Recognition. — 2000. — Vol. 33, № 9. — P. 1405-1410. – doi:10.1016/S0031-3203(99)00127-2
- [21] Flusser J., Suk T., Bedratyuk L., Karella T. *Non-separable moments in 3D* // 20th International Conference on Computer Analysis of Images and

- Patterns (Limassol, Cyprus 25-30 September 2023): book of abstracts. — Limassol, 2023.
- [22] Han J., Ding J., Xue N., Xia G.-S. *ReDet: A rotation-equivariant detector for aerial object detection* // In Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Nashville, TN, USA, 20-25 June 2021): book of abstracts. — 2021. — P. 2786–2795. — doi: 10.1109/CVPR46437.2021.00281
- [23] Hermite C. *Sur quelques développements en serie de fonctions de plusieurs variables.*— Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1865.
- [24] Hoogeboom E., Peters J.W.T. , Cohen T.S., Welling M. *HexaConv* // In International Conference on Learning Representations, 2018. — URL: <https://openreview.net/pdf?id=r1vuQG-CW>
- [25] Hu M.-K. *Visual pattern recognition by moment invariants* // IRE Transactions on Information Theory. — 1962. — Vol. 8, № 2. — P. 179-187.
- [26] Hwang S., Lim H., Myung H. *Equivariance-bridged $SO(2)$ -invariant representation learning using graph convolutional network* // In The 32nd British Machine Vision Conference (BMVC 2021). The British Machine Vision Association, 2021. — doi: 10.48550/arXiv.2106.09996.
- [27] Kamke E. *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen: II. Partielle Differentialgleichungen Erster Ordnung für eine Gesuchte Funktion.* — Stuttgart Teubner, 1979. — 246 p. [in German]
- [28] Kampé de Fériet J. *Sur les fonctions hypersphériques.* Thésés de l'entre-deux-guerres. — Paris, 1915.
- [29] Karella T., Suk T., Košík V., Bedratyuk L., Kerepecký T., Flusser J. *3D Non-separable Moment Invariants and Their Use in Neural Networks*

- // SN Computer Science. — 2024. — Vol.5(8). — P. 1-16. — URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s42979-024-03504-x>
- [30] Karella, T., Sroubek, F., Flusser, J., Blazek, J., & Kosik, V. (2023). *H-NeXt: The next step towards roto-translation invariant networks* // 34th British Machine Vision Conference: book of abstracts. — 2023. — URL: <https://arxiv.org/abs/2311.01111>
- [31] Karella T., Harmanec A., Kotera J., Blazek J., & Sroubek F. *Harmformer: Harmonic Networks Meet Transformers for Continuous Roto-Translation Equivariance*, 2024. — URL: <https://arxiv.org/abs/2411.03794>
- [32] Khasanova R., Frossard P. *Graph-based isometry invariant representation learning* // In Proceedings of the 34th International Conference on Machine Learning. — 2017. — Vol. 70. — P. 1847–1856. — doi: 10.48550/arXiv.1703.00356.
- [33] Kondor R., Trivedi S. *On the generalization of equivariance and convolution in neural networks to the action of compact groups*// In Proceedings of the 35th International Conference on Machine Learning. — 2018. — Vol. 80. — P. 2747–2755. — URL: <https://arxiv.org/pdf/1802.03690>
- [34] Marcos D., Volpi M., Komodakis N., Tuia D. *Rotation equivariant vector field networks* // In Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (Venice, Italy , 22-29 October 2017): book of abstracts. — 2017. — P. 5048–5057. — doi: 10.1109/ICCV.2017.540
- [35] Marcos D., Volpi M., Tuia D. *Learning rotation invariant convolutional filters for texture classification* // In 23rd International Conference on Pattern Recognition (Cancun, Mexico, 04-08 December 2016): book of abstracts. — 2016. — P. 2012–2017. — doi: 10.1109/ICPR.2016.7899932.

- [36] Mukundan R., Ong S. H., Lee P. A. *Image analysis by Tchebichef moments* // IEEE Transactions on Image Processing. — 2001. — Vol. 10, № 9. — P. 1357-1364. — doi: 10.1109/83.941859
- [37] Oyallon E., Mallat S. *Deep roto-translation scattering for object classification* // In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Boston, MA, USA, 07-12 June 2015): book of abstracts. — 2015. — P. 2865–2873. — doi: 10.1109/CVPR.2015.7298904
- [38] Papakostas G. A. *Over 50 years of Image Moments and Moment Invariants* // Moments and Moment Invariants. Theory and Applications. — Kavala, Greece, 2014. — Gate to Computer Science and Research, Vol. 1. — P. 3-32. — doi: 10.15579/gcsr.vol1.ch1
- [39] Pawlak M. *Image Analysis by Moments: Reconstruction and Computational Aspects.*— Wrocław: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2006. — 217 p.
- [40] Samaruk N. *3D quasi-monomials* // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» (Kyiv, Ukraine, 26-27 December 2023): book of abstracts. — Kyiv, 2023. — P. 49.
- [41] Samaruk N. M. *Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group* // Matematychni studii. — 2023. — Vol. 59, № 1. — P. 3–11.
- [42] Samaruk N.M. *Quasi-monomials with respect to rotation and translation subgroups of affine plane group* // The International online conference «Current trends in abstract and applied analysis» (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 12-15 May 2022): book of abstracts. — Ivano-Frankivsk, 2022. — P. 68.
- [43] Samaruk N.M. *SO(3) quasi-monomial polynomial families* // Carpathian Math Publ. — 2024. — Vol. 16, № 1. — P. 40-52..

- [44] Samaruk N. *SO(3)-quasimonomial families of Appell polynomials* // The 15th Ukraine Algebra Conference (Lviv, Ukraine, 8–12 July 2025): book of abstracts. — Lviv, 2025. — P. 95.
- [45] Sifre L., Mallat S. *Combined scattering for rotation invariant texture analysis* // In 20th European Symposium on Artificial Neural Networks, Computational Intelligence and Machine Learning (Bruges, Belgium, 25-27 April 2012): book of abstracts. — 2012. — P. 127-132. — URL: <https://www.di.ens.fr/data/publications/papers/esann12-combinedscatt.pdf>
- [46] Sifre L., Mallat S. *Rotation, scaling and deformation invariant scattering for texture discrimination* // In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Portland, OR, USA, 23-28 June 2013): book of abstracts. — 2013. — P. 1233–1240. — doi: 10.1109/CVPR.2013.163
- [47] Sifre L., Mallat S. *Rigid-motion scattering for texture classification* // International Journal of Computer Vision, 2014. — doi: 10.48550/arXiv.1403.1687.
- [48] Weiler M., Hamprecht F., Storath M. *Learning Steerable Filters for Rotation Equivariant CNNs* // In Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (Salt Lake City, UT, USA, 18-23 June 2018): book of abstracts. — 2018. — P. 849–858. — doi: 10.1109/CVPR.2018.00095
- [49] Yang B., Li G., Zhang H., Dai M. *Rotation and translation invariants of Gaussian-Hermite moments* // Pattern Recognition Letters. — 2011. — Vol. 32. № 9. — P. 1283-1298. — doi: 10.1016/j.patrec.2011.03.012

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ
ДИСЕРТАЦІЇ*Статті в наукових фахових виданнях України (категорії Б):*

1. Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору* // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». — 2023. — Т. 42. № 1. — С. 79-89.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).79-89](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).79-89)

URL: <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/issue/view/16001>

Статті у періодичних виданнях, включених до наукометричних баз SCOPUS:

2. Samaruk N. M. *Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group* // Matematychni studii. — 2023. — Vol. 59. № 1. — P. 3–11.

DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.59.1.3-11>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85163287621>

3. Samaruk N.M. *$SO(3)$ quasi-monomial polynomial families* // Carpathian Math Publ. — 2024. — Vol. 16. № 1. — P. 40-52.

DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.16.1.40-52>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85199423386>

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Samaruk N.M. *Quasi-monomials with respect to rotation and translation subgroups of affine plane group* // The International online conference «Current trends in abstract and applied analysis» (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 12-15 May 2022): book of abstracts. — Ivano-Frankivsk, 2022. — P. 68.

URL: <https://conference.pu.if.ua/cta/BookOfAbstracts.pdf>

5. Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини* // Міжнародна алгебраїчна конференція «Під кінець року 2022» (Київ, Україна, 27-28 грудня 2022 р.): тези доповідей. — Київ, 2022. — С.70.

URL: <https://www.imath.kiev.ua/~algebra/algebra2022/abstracts>

6. Samaruk N. *3D quasi-monomials* // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» (Kyiv, Ukraine, 26-27 December 2023): book of abstracts. — Kyiv, 2023. — P. 49.

URL: https://drive.google.com/file/d/1F2OyRq50ktbiRHgna_n509RnfFPp_VZ4/view

7. Самарук Н. *Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору $SO(3)$* // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.): тези доповідей. — Чернівці, 2024. — С. 94-95.

URL: <https://hahn.chnu.edu.ua/media/odbldmui/book-of-abstracts.pdf>

8. Samaruk N. *$SO(3)$ -quasi-monomial families of Appell polynomials* // The 15th Ukraine Algebra Conference (Lviv, Ukraine, 8–12 July 2025): book of abstracts. — Lviv, 2025. — P. 95.

URL: <https://xvuac.mmf.com.ua/index.php/abstracts>

ДОДАТОК Б

Визначення квазі-мономіальності сім'ї многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$
відносно підгруп афінної групи площини

| Підгрупа афінної групи площини | Умова квазі-мономіальності |
|---------------------------------------|--|
| Масштабувань | $B_{m,n}(sx, ty) = s^m t^n B_{m,n}(x, y),$ <p>для всіх $s, t \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.</p> |
| Рівномірних масштабувань | $B_{m,n}(sx, sy) = s^{m+n} B_{m,n}(x, y),$ <p>для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.</p> |
| Паралельних перенесень | $B_{m,n}(x + a, y + b) =$ $\sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s} b^{n-k} B_{s,k}(x, y),$ <p>для всіх $a, b \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.</p> |
| Рівномірних паралельних перенесень | $B_{m,n}(x + a, y + a) =$ $\sum_{s=0}^m \sum_{k=0}^n \binom{m}{s} \binom{n}{k} a^{m-s+n-k} B_{s,k}(x, y),$ <p>для всіх $a \in \mathbb{R}$ та $m, n \in \mathbb{N}$.</p> |
| Обертань | $B_{m,n}(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) =$ $\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n (-1)^j \binom{m}{j} \binom{n}{k} (\cos \theta)^{m-j+k} (\sin \theta)^{n-k+j} \times$ $B_{m+n-j-k, j+k}(x, y), \text{ для всіх } m, n \in \mathbb{N}.$ |

ДОДАТОК В

Опис експоненціальної породжуючої функції для квазі-мономіальної сім'ї многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ відносно підгруп афінної групи площини

| Підгрупа афінної групи площини | Форма експоненціальної породжуючої функції |
|------------------------------------|--|
| Масштабувань | $G = G(xu, yv).$ |
| Рівномірних масштабувань | $G = G\left(\frac{y}{x}, ux, vx\right).$ |
| Паралельних перенесень | $G = C(u, v)e^{xu+yv}$, де $C(u, v)$ — довільний степеневий ряд за змінними u, v . |
| Рівномірних паралельних перенесень | $G = C(x - y, u, v)e^{xu+yv}$, де $C(x - y, u, v)$ — довільний степеневий ряд за змінними $x - y, u, v$. |
| Обертань | $G = G(ux + vy, x^2 + y^2, u^2 + v^2).$ |

ДОДАТОК Г

Визначення квазі-мономіальності сім'ї многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$
 відносно підгруп афінної групи простору

| Підгрупа афінної групи простору | Умова квазі-мономіальності |
|---------------------------------------|--|
| Масштабувань | $B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = s^m t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$ <p>для всіх $s, t, r \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.</p> |
| Рівномірних масштабувань | $B_{m,n,k}(sx, sy, sz) = s^{m+n+k} B_{m,n,k}(x, y, z),$ <p>для всіх $s \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.</p> |
| Паралельних перенесень | $B_{m,n,k}(x + a, y + b, z + c) =$ $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m-i} b^{n-j} c^{k-l} B_{i,j,l}(x, y, z),$ <p>для всіх $a, b, c \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.</p> |
| Рівномірних паралельних перенесень | $B_{m,n,k}(x + a, y + a, z + a) =$ $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{l=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{j} \binom{k}{l} a^{m+n+k-i-j-l} B_{i,j,l}(x, y, z),$ <p>для всіх $a \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.</p> |

ДОДАТОК Д

Опис експоненціальної породжуючої функції для квазі-мономіальної сім'ї многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ відносно підгруп афінної групи простору

| Підгрупа афінної групи простору | Форма експоненціальної породжуючої функції |
|------------------------------------|---|
| Масштабувань | $G = G(xu, yv, zw).$ |
| Рівномірних масштабувань | $G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$ |
| Паралельних перенесень | $G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ — довільний степеневий ряд за змінними u, v, w . |
| Рівномірних паралельних перенесень | $G = C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де $C(x - y, x - z, u, v, w)$ — довільний степеневий ряд за змінними $x - y, x - z, u, v, w$. |
| Обертань | $G = G(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2).$ |