АНОТАЦІЯ

Самарук Н.М. Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. — Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Міністерство освіти і науки України, м. Івано-Франківськ, 2026.

Дисертація присвячена дослідженню квазі-мономів відносно підгруп афінних груп перетворень площини та простору.

Для розпізнавання та класифікації зображень за допомогою алгоритмів машинного навчання необхідно побудувати такі ознаки, які залишаються інваріантними відносно геометричних перетворень площини, що не змінюють структури сцени. У випадку двовимірних зображень до таких перетворень належать обертання, паралельні перенесення, масштабування та їхні композиції. Відповідні інваріантні характеристики називають моментними інваріантами. Залежно від вибору базису в просторі многочленів $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$, де m, n – цілі невід'ємні числа (тут і надалі в тексті), розглядаються різні системи моментів. У найпростішому випадку, коли $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$, отримуються геометричні моменти. Ці класичні моменти були вперше запропоновані автором М.-К. Ху (Hu M.-K.) та стали основою побудови 2D-інваріантних ознак відносно паралельних перенесень, масштабувань і обертань. Алгебра відповідних моментних інваріантів детально вивчена, зокрема в роботах Я. Флюссера (Flusser J.) та Л. Бедратюка, де було наведено явний опис породжуючих елементів.

Проте практичне використання геометричних моментів стикається з проблемами чисельної нестабільності при обчисленнях у дискретних областях, особливо для великих зображень. Це спонукало дослідників до переходу на інші, обчислювально стійкіші базиси — ортогональні або псевдоорто-

гональні. Однак при цьому виникла нова проблема: як зручно виражати та обчислювати інваріанти за змінного базису. Дослідники Ч.-В. Чонг, П. Равендран, Р. Мукундан (Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R.) знайшли розв'язання цієї задачі лише в окремих випадках — наприклад, для моментів Лежандра без урахування обертання. Проте загальний підхід залишався складним і недостатньо розробленим.

Вирішальним стало відкриття Б. Яна, Х. Чжана та М. Дая (Yang B., Zhang H., Dai M.), які виявили, що при виборі базису

$$\pi_{m,n}(x, y) = H_m(x)H_n(y),$$

де $\{H_n(x)\}$ — класичні многочлени Ерміта, форма моментних інваріантів відносно групи $SO(2)$ збігається з формою геометричних моментів. Це несподіване співпадіння дозволило ефективно обчислювати ермітові ортогональні моменти, інваріантні до обертання.

Подальший розвиток цієї ідеї був здійснений у роботах Л. Бедратюка, Я. Флюссера, Т. Сака, Я. Косткової та Я. Кауцького (Flusser J., Suk T., Kostkova J., Kautsky J.). У своїй праці вони запропонували повний опис усіх многочленів, які мають властивість зберігати форму моментних інваріантів при зміні базису. Ця властивість дістала назву квазі-мономіальності. Знання таких квазі-мономіальних многочленів (*далі – квазі-мономів*) для основних груп перетворень площини й простору є важливим для побудови швидких і стабільних алгоритмів обчислення моментних інваріантів.

Запропонований підхід природно узагальнюється на тривимірний випадок, де замість функцій двох змінних розглядаються функції трьох змінних, що дає змогу застосовувати аналогічні ідеї для аналізу 3D-зображень.

У зв'язку з цим актуальним є дослідження квазі-мономів для різних підгруп афінних груп перетворень площини й простору та встановлення їхніх властивостей. Отримані результати мають значення не лише для прикладних задач розпізнавання образів і аналізу зображень, але й для суміжних галузей — комбінаторики, теорії груп і теорії спеціальних функцій.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, переліку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатків.

У вступі обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження. Визначено наукову новизну отриманих результатів, їх практичне значення, зв'язок дисертаційної роботи з науковими темами, зазначено особистий внесок здобувача, а також подано інформацію про апробацію та публікацію результатів дослідження.

Основна частина дисертації складається з чотирьох розділів, кожен із яких поділений на підрозділи. Наприкінці кожного розділу сформульовано узагальнюючі висновки.

Перший розділ має підготовчий характер і присвячений аналізу літератури за темою дослідження. У ньому здійснено вибір методології, сформульовано підходи до побудови теорії квазі-мономів та наведено допоміжні результати, необхідні для подальших досліджень.

Другий розділ присвячено означенню та дослідженню основних властивостей квазі-мономів відносно підгруп афінної групи площини.

У підрозділі 2.1 розглянуто формування основних математичних понять, що передують введенню квазі-мономів, та подано означення квазі-мономіальності. Сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ називається квазі-мономіальною відносно підгрупи H афінної групи $\mathrm{Aff}(2)$, якщо вона утворює такий базис простору многочленів від двох змінних, у якому дія групи H задається матрицями, тотожними тим, що відповідають дії H в стандартному мономіальному базисі $x^m y^n$. Такі многочлени називаються квазі-мономами.

У підрозділі 2.2 наведено основні означення та теореми щодо квазі-мономів відносно групи обертань площини $SO(2)$. Сформульовано критерій квазі-мономіальності у термінах експоненціальної породжуючої функції. Зокрема, функція

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}$$

є породжуючою функцією квазі-мономіальної сім'ї многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ відносно $SO(2)$ тоді й лише тоді, коли $G = G(ux+vy, x^2+y^2, u^2+v^2)$. Окремо розглянуто диференціальні рівняння, яким задовольняють квазі-мономи $SO(2)$.

У підрозділі 2.3 дається схожий опис квазі-мономів щодо неперервних підгруп перетворень афінної групи площини, а саме групи масштабувань. Сформульовано критерій квазі-мономіальності: сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією G, є квазі-мономіальною відносно групи масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією двох змінних $G = G\left(xu, yv\right)$.

У підрозділі 2.4 розглянуто квазі-мономи щодо групи рівномірних масштабувань площини. Встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією G, є квазі-мономіальною щодо групи рівномірних масштабувань площини тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних: $G = G\left(\frac{y}{x}, ux, vx\right)$.

У підрозділі 2.5 описано квазі-мономи щодо групи паралельних перенесень площини та наведено критерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів відносно цієї групи у термінах її експоненціальної породжуючої функції. Зокрема, доведено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x,y)\}$ є квазі-мономіальною відносно групи паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $G = C(u,v)e^{xu+yv}$, де $C(u,v)$ — довільний степеневий ряд за змінними u, v.

Крім того, встановлено який вид нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності. Також наведено рекурентні співвідношення для сім'ї многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$.

У підрозділі 2.6 дається схожий опис квазі-мономів щодо групи рівномірних паралельних перенесень площини. Встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n}(x, y)\}$ буде квазі-мономоміальною сім'єю відносно групи рівномірних паралельних перенесень площини тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $G = C(x - y, u, v)e^{xu+yv}$ де C – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, u, v$.

Третій розділ присвячено опису квазі-мономів від трьох змінних відносно підгруп афінної групи простору $\mathrm{Aff}(3)$.

У підрозділі 3.2 розглянуто квазі-мономи щодо групи масштабувань простору. Доведено, що сім'я $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли виконується:

$$B_{m,n,k}(sx, ty, rz) = s^m t^n r^k B_{m,n,k}(x, y, z),$$

для всіх $s, t, r \in \mathbb{R}$ та $m, n, k \in \mathbb{N}$.

Також описано всі сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними відносно групи масштабувань простору в термінах породжуючої функції. Доведено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненційною породжуючою функцією

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x, y, z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!},$$

буде квазі-мономіальною відносно групи масштабувань простору тоді і тільки тоді, коли G є функцією від трьох змінних: $G = G\left(xu, yv, zw\right)$.

У підрозділі 3.3 дається опис квазі-мономів щодо групи рівномірних масштабувань простору та встановлюється той факт, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією G, буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних масштабувань простору тоді і тільки тоді коли G є функцією від змінних:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

У підрозділі 3.4 описано квазі-мономи щодо групи паралельних перенесень простору та наведено китерій квазі-мономіальності сім'ї многочленів у термінах її експоненціальної породжуючої функції. Зокрема, показано, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ є квазі-мономіальною сім'єю відносно групи паралельних перенесень простору тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд за змінними u, v, w.

Крім того, встановлено який тип нормалізації зберігає властивість квазі-мономіальності.

У підрозділі 3.5 дається схожий опис квазі-мономів щодо групи рівномірних паралельних перенесень простору. Зокрема, встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ буде квазі-мономіальною відносно групи рівномірних паралельних перенесень тоді і тільки тоді коли її експоненціальна породжуюча функція має вигляд $C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, де C – довільний степеневий ряд за змінними $x - y, x - z, u, v, w$.

Четвертий розділ є просторовим аналогом другого розділу й присвячений опису квазі-мономів відносно групи обертань простору $SO(3)$.

У підрозділі 4.2 наведено визначення дії спеціальної ортогональної тривимірної групи $SO(3)$ на многочлени $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ через розкладання за певним комбінаторним законом, що забезпечує збереження квазі-мономіальної форми. Встановлено, що сім'я многочленів $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, визначена експоненціальною породжуючою функцією G, є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли G є функцією трьох змінних:

$$G = G(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2).$$

Крім того, наведено приклад, у якому доведено, що многочлени Ерміта від трьох змінних є квазі-мономами відносно $SO(3)$, а також встановлено умови нормалізації, які зберігають квазі-мономіальність.

У підрозділі 4.3 наведено приклади біортогональних многочленів Аппеля, які є квазі-мономами $SO(3)$, а також подано рекурентні співвідношення, що забезпечують ефективність їх обчислення.

Ключові слова: квазі-мономіальні многочлени, квазі-мономи, поліноми, групи, матричні групи, підгрупа, афінна група, афінні перетворення площини та простору, групи обертань $SO(2)$ та $SO(3)$, група масштабувань, група паралельних перенесень, многочлени Аппеля, матриця, експоненціальна породжуюча функція.

ABSTRACT

Samaruk N.M. Quasi-monomial polynomials of subgroups of an affine group. — Qualifying scientific work as a manuscript.

Dissertation for obtaining the degree of Doctor of Philosophy in specialty 111 Mathematics. — Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Ivano-Frankivsk, 2026.

The dissertation is devoted to the study of quasi-monomial polynomials with respect to subgroups of affine transformation groups of plane and space.

For recognition and classification of images using machine learning algorithms, it is necessary to construct features that remain invariant with respect to geometric transformations of the plane that do not change the structure of the scene. In the case of two-dimensional images, such transformations include rotations, parallel translations, scaling, and their compositions. The corresponding invariant characteristics are called moment invariants. Depending on the choice of basis in the polynomial space $\{\pi_{m,n}(x, y)\}$, where m, n are non-negative integers (here and further in the text), different moment systems are considered. In the simplest case, when $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$, geometric moments are obtained. In the simplest case, when $\pi_{m,n}(x, y) = x^m y^n$, geometric moments are obtained. These classical moments were first proposed by M.-K. Hu and became the basis for constructing 2D-invariant features with respect to parallel translations, scaling, and rotations. The algebra of corresponding moment invariants has been studied in detail, particularly in the works of J. Flusser and L. Bedratyuk , where an explicit description of generating elements was provided.

However, practical use of geometric moments faces problems of numerical instability in calculations in discrete domains, especially for large images. This prompted researchers to switch to other, computationally more stable bases — orthogonal or pseudo-orthogonal. However, this created a new problem: how to conveniently express and calculate invariants when the basis is changed.

Researchers C.-W. Chong, P. Raveendran, and R. Mukundan found solutions to this problem only in special cases — for example, for Legendre moments without considering rotation. However, the general approach remained complex and insufficiently developed.

The breakthrough came with the discovery by B. Yang, G. Li , H. Zhang, and M. Dai, who found that when choosing the basis

$$\pi_{m,n}(x, y) = H_m(x)H_n(y),$$

where $\{H_n(x)\}$ are the classical Hermite polynomials, the form of moment invariants with respect to the group $SO(2)$ coincides with the form of geometric moments. This unexpected coincidence allowed for efficient computation of Hermite orthogonal moments invariant to rotation.

Further development of this idea was carried out in the works of J. Flusser, L. Bedratyuk, T. Suk, J. Kostkova, and J. Kautsky. In their work, they proposed a complete description of all polynomials that have the property of preserving the form of moment invariants when changing the basis. This property was named quasi-monomiality. Knowledge of such quasi-monomials for the main groups of transformations of the plane and space is important for constructing fast and stable algorithms for computing moment invariants.

The proposed approach naturally generalizes to the three-dimensional case, where instead of functions of two variables, functions of three variables are considered, which allows applying similar ideas for analyzing 3D images.

Therefore, the study of quasi-monomials for various subgroups of affine transformation groups of the plane and space and the establishment of their properties is relevant. The obtained results are significant not only for applied problems of pattern recognition and image analysis but also for related fields — combinatorics, group theory, and the theory of special functions.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, a list of symbols, an introduction, four chapters of the main part, conclusions, a list of references, and appendices.

The introduction substantiates the relevance of the chosen topic, formulates the purpose, object, subject, tasks, and research methods. The scientific novelty of the obtained results, their practical significance, the connection of the dissertation work with scientific topics are determined, the personal contribution of the candidate is specified, and information on the approbation and publication of research results is provided.

The main part of the dissertation consists of four chapters, each divided into subsections. At the end of each chapter, generalizing conclusions are formulated.

The *first chapter* is preparatory in nature and is devoted to the analysis of literature on the research topic. It carries out the choice of methodology, formulates approaches to constructing the theory of quasi-monomials, and provides auxiliary results necessary for further research.

The *second chapter* is devoted to the meaning and study of the basic properties of quasi-monomials with respect to subgroups of the affine group of the plane.

Subsection 2.1 examines the formation of the basic mathematical concepts preceding the introduction of quasi-monomials and provides the definition of quasi-monomiality. A family of polynomials $\{B_{m,n}(x, y)\}$ is called quasi-monomial with respect to a subgroup H of the affine group $\mathrm{Aff}(2)$ if it forms a basis for the space of polynomials in two variables in which the action of the group H is given by matrices identical to those corresponding to the action of H in the standard monomial basis $x^m y^n$. Such polynomials are called quasi-monomials.

In subsection 2.2, the basic definitions and theorems regarding quasi-monomials with respect to the group of rotations of the plane $SO(2)$ are presented. The criterion of quasi-monomiality is formulated in terms of the exponential generating function. In particular, the function

$$G = \sum_{m,n=0}^{\infty} B_{m,n}(x,y)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}$$

is a generating function of the quasi-monomial family of polynomials $\{B_{m,n}(x,y)\}$ with respect to $SO(2)$ if and only if $G = G(ux+vy, x^2+y^2, u^2+v^2)$. The differential equations satisfied by the quasi-monomials $SO(2)$ are separately considered.

In subsection 2.3, a similar description of quasi-monomials with respect to continuous subgroups of transformations of the affine group of the plane, namely the scaling group, is given. A criterion of quasi-monomiality is formulated: a family of polynomials $\{B_{m,n}(x,y)\}$, defined by the exponential generating function G, is quasi-monomial with respect to the scaling group of the plane if and only if G is a function of two variables: $G = G\,(xu, yv)$.

In subsection 2.4, quasi-monomials with respect to the group of uniform scalings of the plane are considered. It is established that a family of polynomials $\{B_{m,n}(x,y)\}$, defined by the exponential generating function G, is quasi-monomial with respect to the group of uniform scalings of the plane if and only if G is a function of three variables: $G = G\left(\frac{y}{x}, ux, vx\right)$.

In subsection 2.5, quasi-monomials with respect to the translation group of the plane are described, and a criterion for the quasi-monomiality of a family of polynomials with respect to this group is given in terms of its exponential generating function. It is proved that a family of polynomials $\{B_{m,n}(x,y)\}$ is quasi-monomial with respect to the translation group of the plane if and only if its exponential generating function has the form $G = C(u,v)e^{xu+yv}$, where $C(u,v)$ – is an arbitrary power series in variables u, v.

Additionally, the type of normalization that preserves the property of quasi-monomiality is established. Recurrence relations for the family of polynomials $\{B_{m,n}(x,y)\}$ are also provided.

In subsection 2.6, a similar description of quasi-monomials with respect to the uniform translation group of the plane is given. It is established that a family of polynomials $\{B_{m,n}(x,y)\}$ will be a quasi-monomial family with respect to the uniform translation group of the plane if and only if its exponential generating function has the form $G = C(x-y,u,v)e^{xu+yv}$, where C – is an arbitrary power series in variables $x-y,u,v$.

The *third chapter* is devoted to the description of quasi-monomials of three variables with respect to subgroups of the affine group of space Aff(3).

In subsection 3.2, quasi-monomials with respect to the scaling group of space are considered. It is proved that a family $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$ is quasi-monomial if and only if the following holds:

$$B_{m,n,k}(sx,ty,rz) = s^m t^n r^k B_{m,n,k}(x,y,z),$$

for all $s,t,r \in \mathbb{R}$ and $m,n,k \in \mathbb{N}$.

All families of polynomials that are quasi-monomial with respect to the scaling group of space are also described in terms of the generating function. It is proved that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$, defined by the exponential generating function

$$G = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} B_{m,n,k}(x,y,z)\frac{u^m}{m!}\frac{v^n}{n!}\frac{w^k}{k!},$$

will be quasi-monomial with respect to the scaling group of space if and only if G is a function of three variables: $G = G\left(xu, yv, zw\right)$.

In subsection 3.3, a description of quasi-monomials with respect to the group of uniform scalings of space is given, and it is established that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x,y,z)\}$, defined by the exponential generating function G, will be quasi-monomial with respect to the group of uniform scalings of space if and only if G is a function of the variables:

$$G = G\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx\right).$$

In subsection 3.4, quasi-monomials with respect to the translation group of space are described, and a criterion of quasi-monomiality for a family of polynomials is given in terms of its exponential generating function. In particular, it is shown that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ is a quasi-monomial family with respect to the translation group of space if and only if its exponential generating function has the form $G = C(u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, where $C(u, v, w)$ – is an arbitrary power series in variables u, v, w. Additionally, the type of normalization that preserves the property of quasi-monomiality is established.

In subsection 3.5, a similar description of quasi-monomials with respect to the uniform translation group of space is given. In particular, it is established that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ will be quasi-monomial with respect to the uniform translation group if and only if its exponential generating function has the form $C(x - y, x - z, u, v, w)e^{xu+yv+zw}$, where C – is an arbitrary power series in variables $x - y, x - z, u, v, w$.

The *fourth chapter* is the spatial analogue of the second chapter and is devoted to the description of quasi-monomials with respect to the rotation group of space $SO(3)$. In subsection 4.2, the definition of the action of the special orthogonal three-dimensional group $SO(3)$ on polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$ is given through decomposition according to a certain combinatorial law, which ensures the preservation of the quasi-monomial form. It is established that a family of polynomials $\{B_{m,n,k}(x, y, z)\}$, defined by the exponential generating function G, is quasi-monomial if and only if G is a function of three variables:

$$G = G(ux + vy + wz, x^2 + y^2 + z^2, u^2 + v^2 + w^2).$$

In addition, an example is given in which it is proven that Hermite polynomials in three variables are quasi-monomials with respect to $SO(3)$, and normalization conditions that preserve quasi-monomiality are established.

In subsection 4.3, examples of biorthogonal Appell polynomials that are

quasi-monomials $SO(3)$ are given, as well as recurrence relations that ensure the efficiency of their computation.

Keywords: quasi-monomial polynomials, quasi-monomials, polynomials, groups, matrix groups, subgroup, affine group, affine transformations of the plane and space, rotation groups $SO(2)$ *and* $SO(3)$*, scaling group, translation group, Appel polynomials, matrix, exponential generating function.*

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті в наукових фахових виданнях України (категорії Б):

1. Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору* // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». — 2023. – Т. 42. № 1. – С. 79-89.

DOI: https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).79-89

URL: http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/issue/view/16001

Статті у періодичних виданнях, включених до наукометричної бази SCOPUS:

2. Samaruk N. M. *Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group* // Matematychni studii. — 2023. – Vol. 59. № 1. – P. 3–11.

DOI: https://doi.org/10.30970/ms.59.1.3-11

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85163287621

3. Samaruk N.M. *SO(3) quasi-monomial polynomial families* // Carpathian Math Publ. — 2024. – Vol. 16. № 1. – P. 40-52.

DOI: https://doi.org/10.15330/cmp.16.1.40-52

URL: https://www.scopus.com/pages/publications/85199423386

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

4. Samaruk N.M. *Quasi-monomials with respect to rotation and translation subgroups of affine plane group* // The International online conference «Current trends in abstract and applied analysis» (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 12-15 May 2022): book of abstracts. — Ivano-Frankivsk, 2022. – P. 68.

URL: https://conference.pu.if.ua/cta/BookOfAbstracts.pdf

5. Самарук Н.М. *Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини* // Міжнародна алгебраїчна конфернція «Під кінець року 2022» (Київ, Україна, 27-28 грудня 2022 р.): тези доповідей. — Київ, 2022. – С.70.

URL: https://www.imath.kiev.ua/~algebra/algebra2022/abstracts

6. Samaruk N. *3D quasi-monomials* // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» (Kyiv, Ukraine, 26-27 December 2023): book of abstracts. — Kyiv, 2023. – P. 49.

URL: https://drive.google.com/file/d/1F2OyRq50ktbiRHgna_n509RnfFPp_VZ4/view

7. Самарук Н. *Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору SO(3)* // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.): тези доповідей. — Чернівці, 2024. – С. 94-95.

URL: https://hahn.chnu.edu.ua/media/odbldmui/book-of-abstracts.pdf

8. Samaruk N. *SO(3)-quasi-monomial families of Appell polynomials* // The 15th Ukraine Algebra Conference (Lviv, Ukraine, 8–12 July 2025): book of abstracts. — Lviv, 2025. – P. 95.

URL: https://xvuac.mmf.com.ua/index.php/abstracts