

КАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Долішняк Дарина Юріївна

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

**ТОПОЛОГІЧНА ТРАНЗИТИВНІСТЬ ТА ХАОТИЧНІСТЬ
ОПЕРАТОРІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З СИМЕТРИЧНИМИ ТА
СУБСИМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ**

111 Математика

11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Д. Ю. Долішняк

Науковий керівник: Загороднюк Андрій Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор.

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК — 2026

АНОТАЦІЯ

Долішняк Д. Ю. Топологічна транзитивність та хаотичність операторів, пов'язаних з симетричними та субсиметричними поліномами. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2026 — Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2026.

Дисертаційна робота виконана у межах теорії поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах і присвячена дослідженню операторів, пов'язаних із симетричними та субсиметричними поліномами, а також вивченню субсиметричних аналітичних функцій, метричних структур, визначених на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин та динамічних властивостей нелінійних відображень, що виникають у цих випадках. У роботі поєднано кілька взаємопов'язаних напрямів сучасної математики: нелінійний функціональний аналіз, теорію симетричних та субсиметричних поліномів, теорію аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах, метричну теорію мультимножин і динаміку операторів. Саме таке поєднання дає змогу розглядати симетричні та субсиметричні конструкції не лише як алгебраїчні об'єкти, а як й структури, для яких характерна складна топологічна та динамічна поведінка.

Теорія симетричних і субсиметричних поліномів відіграють важливу роль у класичній алгебрі та сучасному функціональному аналізі. У другій половині ХХ століття ідеї, пов'язані з симетричними поліномами, були перенесені в нескінченновимірний простір, де предметом дослідження стали поліноми й аналітичні функції на банахових просторах, їх алгебраїчна будова, спектральні властивості та апроксимаційні характеристики. Значний внесок у розвиток цього напрямку зробили Р. Арон, П. Галіндо, А. Загороднюк, І. Чернега, Т. Васишин, С. Васишин, В. Кравців, Ф. Джавад, Р. Гонсало та інші науковці. У їхніх працях вивчалися алгебраїчні бази си-

метричних поліномів, спектри алгебр аналітичних функцій, факторизація, а також різні класи симетричних, блочно-симетричних, суперсиметричних і субсиметричних функцій. У роботах, присвячених симетричним аналітичним функціям на просторах ℓ_p , розглядалися як точкові функціонали, так і більш загальні спектральні елементи, що дало змогу детальніше зрозуміти, як симетрія простору визначає структуру алгебр функцій.

Природним узагальненням симетричних поліномів у нескінченновимірному випадку є субсиметричні поліноми, що виникають на банахових просторах із субсиметричним базисом. У цьому напрямі важливими є результати Р. Гонсало, а також подальші дослідження, у яких розглядалися алгебри субсиметричних поліномів, їх множини нулів, властивості факторіальності та різні застосування в теорії операторів. Окремий напрям дослідження, на який спирається дисертація, стосується мультимножин та пов'язаних із ними алгебраїчних і метричних структур. У ширшому математичному контексті варто згадати роботи Р. Дедекінда, К. Вейєрштрасса, Д. Кнута, Р. Меєра, М. Макроббі, а в сучасному функціональному аналізі — І. Чернегу, Т. Василюшина, А. Загороднюка, Ю. Чоп'юка, В. Кравців та їхніх співавторів. Перехід до мультимножин виникає при факторизації простору за відношенням еквівалентності. Побудова на таких множинах метрик, узгоджених з алгебраїчними операціями, дає можливість коректно вивчати збіжність, неперервність, щільність орбіт, транзитивність та інші динамічні характеристики. Не менш важливим є і зв'язок дисертаційної роботи з класичною теорією динаміки операторів, у якій фундаментальні результати належать Г. Біркгофу, С. Ролевичу, Ч. Кітаї, А. Перісу Мангільйоту, А. Мануссосу та іншим математикам.

Як було показано вище, дослідження симетричних і субсиметричних поліномів на банахових просторах приводить не лише до вивчення алгебраїчних властивостей відповідних класів функцій, а й до аналізу пов'язаних із ними факторних та метричних структур. Зокрема, перехід до мультимножин і впорядкованих мультимножин дає змогу описувати еквівалентність

елементів простору, будувати природні метрики на відповідних множинах і досліджувати оператори, що діють на цих просторах. У дисертаційній роботі цей підхід розглянено для субсиметричних поліномів та функцій на банахових просторах, а також для операторів, пов'язаних із симетричними і субсиметричними поліномами.

Основним завданням дисертаційного дослідження є вивчення алгебраїчних та аналітичних властивостей субсиметричних поліномів і пов'язаних із ними функцій, побудова та дослідження метричних структур на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин, а також встановлення умов топологічної транзитивності, хаотичності та зміщуваності відповідних операторів. Зокрема, у роботі досліджуються властивості алгебр субсиметричних поліномів, множини нулів таких поліномів, прото-субсиметричні функції, апроксимація і похідні субсиметричних функцій, а також динамічні властивості операторів лівого зсуву й операторів диференціювання.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка, який містить публікації автора та апробації результатів дисертаційної роботи.

У вступі подано загальну характеристику дисертаційної роботи, обґрунтовано доцільність дослідження обраної теми та описано її місце в сучасних наукових напрямках. Визначено зв'язок роботи з науководослідними темами і проєктами, сформульовано мету та основні завдання дослідження, уточнено об'єкт, предмет і використані методи. Окремо висвітлено наукову новизну одержаних результатів, їхнє теоретичне і практичне значення, наведено відомості про особистий внесок здобувачки, а також подано інформацію про публікації та апробацію основних результатів дисертації.

Перший розділ має оглядово-теоретичний характер. У ньому проаналізовано наукові праці, безпосередньо пов'язані з тематикою дисертації, викладено базові результати та поняття, що становлять теоретичне підґрунтя подальших досліджень.

Другий розділ присвячено вивченню субсиметричних аналітичних функцій на банахових просторах. У цьому розділі досліджено алгебраїчні властивості алгебр субсиметричних поліномів, розглянуто їх застосування в теорії операторів, проаналізовано множини нулів субсиметричних поліномів, введено клас прото-субсиметричних функцій, а також одержано результати щодо апроксимації і диференціювання субсиметричних функцій.

У підрозділі 2.1 досліджено властивості алгебр субсиметричних поліномів на банахових просторах із субсиметричним базисом. Основну увагу зосереджено на алгебрі субсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ на просторі ℓ_p . Розглянуто питання еквівалентності елементів $x, y \in \ell_p$ за значеннями субсиметричних поліномів і встановлено відповідні критерії. Крім того, досліджено гомоморфізми цієї алгебри, а також побудовано продовження субсиметричних поліномів зі збереженням їх основних властивостей.

У підрозділі 2.2 розглянуто продовження субсиметричних функцій на ширші класи просторів. Побудовано продовження субсиметричних поліномів та досліджено умови збереження їхніх основних властивостей, зокрема ізометричності.

У підрозділі 2.3 наведено приклади субсиметричних поліномів у функційних гільбертових просторах. Розглянуто конкретні конструкції поліномів та проаналізовано їхні властивості в межах функційних гільбертових просторів.

У підрозділі 2.4 розглянуто застосування субсиметричних поліномів у теорії операторів. Показано, що поліноми з класу $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ можуть бути використані для опису спектральних властивостей операторів. У такому випадку алгебраїчні властивості субсиметричних поліномів пов'язуються з операторними задачами.

У підрозділі 2.5 розглянуто множини нулів субсиметричних поліномів на просторі X . Досліджено їхні структурні властивості в нескінченновимірному просторі та показано, що ядра таких поліномів мають нетривіальну

будову.

У підрозділі 2.6 досліджено алгебри субсиметричних поліномів. Розглянуто властивості відповідних алгебр, їх гомоморфізми та факторіальні властивості. Доведено, що на комплексному просторі ℓ_p з субсиметричним ядром буде субсиметричним.

У підрозділі 2.7 введено клас прото-субсиметричних функцій і досліджено його основні властивості. Показано, що цей клас пов'язаний із субсиметричними поліномами та аналітичними функціями, але водночас є ширшим за клас стандартних субсиметричних функцій.

У підрозділі 2.8 одержано результати про апроксимацію субсиметричних функцій поліномами відповідного типу. Розглянуто умови, за яких функції із субсиметричними властивостями можна наближати поліномами з алгебри $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ або споріднених класів.

У підрозділі 2.9 досліджено похідні, пов'язані із субсиметричними функціями. Введено похідні ∂_L , ∂_R та ∂_M , узгоджені з операцією субсиметричного зсуву, і встановлено їхній зв'язок із похідною Гато.

Третій розділ присвячено дослідженню динаміки операторів, пов'язаних із симетричними та субсиметричними структурами. Основну увагу приділено побудові метричних структур на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин, а також вивченню топологічної транзитивності та змішуваності відповідних операторів.

У підрозділі 3.1 побудовано метрику на множині мультимножин \mathcal{M}_X^+ та досліджено її основні властивості. Показано, що ця метрика узгоджується з алгебраїчними операціями на просторі мультимножин і може бути використана для аналізу збіжності, неперервності та динамічної поведінки відповідних відображень.

У підрозділі 3.2 побудовано метрику на множині впорядкованих мультимножин \mathfrak{M}_X та встановлено її зв'язок з алгебраїчною і топологічною структурою цього простору.

У підрозділі 3.3 досліджено оператор лівого зсуву $\mathfrak{T}_\lambda : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$ у

просторі мультимножин та встановлено умови його топологічної транзитивності.

У підрозділі 3.4 розглянуто оператор лівого зсуву \tilde{B}_λ у просторі впорядкованих мультимножин і досліджено його топологічну транзитивність.

У підрозділі 3.5 застосовано критерій Китаї до операторів диференціювання та лівих обернених до операторів, пов'язаних із алгебрами субсиметричних функцій. Одержано умови змішуваності та хаотичності відповідних операторів.

Ключові слова: простір цілих функцій, простори сумовних послідовностей, функції першого класу Бера, поліном на банаховому просторі, симетричний поліном, субсиметричний поліном, субсиметрична функція, апроксимація поліномами, мультимножина, впорядкована мультимножина, метризований топологічний простір, лінійний оператор лівого зсуву, оператор диференціювання, топологічна транзитивність, хаотичність.

ABSTRACT

Dolishniak D. Y. Topological Transitivity and Chaoticity of Operators Associated with Symmetric and Subsymmetric Polynomials. — Qualifying scientific work as a manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree in Mathematics, speciality 111 — Mathematics. — Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2026. — Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2026.

The thesis was carried out within the framework of the theory of polynomials and analytic functions on Banach spaces and is devoted to the study of operators associated with symmetric and subsymmetric polynomials, as well as to the investigation of subsymmetric analytic functions, metric structures on sets of multisets and ordered multisets, and dynamical properties of nonlinear mappings arising in these settings. The work combines several interrelated areas of modern mathematics: nonlinear functional analysis, the theory of symmetric and subsymmetric polynomials, the theory of analytic functions on infinite-dimensional spaces, the metric theory of multisets, and operator dynamics. Such a combination makes it possible to consider symmetric and subsymmetric constructions not only as algebraic objects, but also as structures characterized by complicated topological and dynamical behavior.

The theory of symmetric and subsymmetric polynomials plays an important role in classical algebra and modern functional analysis. In the second half of the twentieth century, ideas related to symmetric polynomials were transferred to infinite-dimensional spaces, where polynomials and analytic functions on Banach spaces, their algebraic structure, spectral properties, and approximation characteristics became the subject of investigation. Significant contributions to the development of this direction were made by R. Aron, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, I. Chernega, T. Vasylyshyn, S. Vasylyshyn, V. Kravtsiv, F. Jawad, R. Gonzalo, and other researchers. Their works studied algebraic bases of symmetric polynomials, spectra of algebras of analytic functi-

ons, factorization, as well as various classes of symmetric, block-symmetric, supersymmetric, and subsymmetric functions. In works devoted to symmetric analytic functions on the spaces ℓ_p , both point evaluations and more general spectral elements were considered, which allowed a more detailed understanding of how the symmetry of the space determines the structure of function algebras.

A natural generalization of symmetric polynomials in the infinite-dimensional case is provided by subsymmetric polynomials arising on Banach spaces with a subsymmetric basis. In this direction, important results belong to R. Gonzalo, as well as to subsequent studies devoted to algebras of subsymmetric polynomials, their zero sets, factoriality properties, and various applications in operator theory. Another direction of research on which the thesis relies concerns multisets and the algebraic and metric structures associated with them. In a broader mathematical context, it is worth mentioning the works of R. Dedekind, K. Weierstrass, D. Knuth, R. Meyer, and M. Macrobbi, while in modern functional analysis related studies were carried out by I. Chernega, T. Vasylyshyn, A. Zagorodnyuk, Yu. Chopiuk, V. Kravtsiv, and their co-authors. The transition to multisets arises naturally in the factorization of a space with respect to an equivalence relation. Constructing metrics on such sets that are compatible with algebraic operations makes it possible to correctly investigate convergence, continuity, density of orbits, transitivity, and other dynamical characteristics. Equally important is the connection of the thesis with the classical theory of operator dynamics, in which fundamental results belong to G. Birkhoff, S. Rolewicz, C. Kitai, A. Peris Manguillot, A. Manoussos, and other mathematicians.

As shown above, the study of symmetric and subsymmetric polynomials on Banach spaces leads not only to the investigation of algebraic properties of the corresponding classes of functions, but also to the analysis of the associated factor and metric structures. In particular, the transition to multisets and ordered multisets makes it possible to describe the equivalence of elements of

a space, construct natural metrics on the corresponding sets, and investigate operators acting on these spaces. In the thesis, this approach is considered for subsymmetric polynomials and functions on Banach spaces, as well as for operators associated with symmetric and subsymmetric polynomials.

The main objective of the thesis is to investigate algebraic and analytic properties of subsymmetric polynomials and the functions associated with them, to construct and study metric structures on sets of multisets and ordered multisets, and to establish conditions for topological transitivity, chaoticity, and mixing of the corresponding operators. In particular, the thesis studies properties of algebras of subsymmetric polynomials, zero sets of such polynomials, proto-symmetric functions, approximation and derivatives of subsymmetric functions, as well as dynamical properties of backward shift operators and differentiation operators.

The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusions, a list of references, and an appendix containing the author's publications and presentation of the results of the thesis.

The introduction presents a general description of the thesis, substantiates the relevance of the chosen topic, and describes its place within contemporary scientific directions. The connection of the thesis with research projects and scientific programs is specified, the aim and the main objectives of the study are formulated, and the object, subject, and methods of research are clarified. Particular attention is paid to the scientific novelty of the obtained results, their theoretical and practical significance, information about the author's personal contribution, as well as information concerning the publication and approbation of the main results of the thesis.

The first chapter is of a survey-theoretical nature. It analyzes scientific works directly related to the topic of the thesis and presents the basic results and notions forming the theoretical foundation for further investigations.

The second chapter is devoted to the study of subsymmetric analytic functions on Banach spaces. This chapter investigates algebraic properties of

algebras of subsymmetric polynomials, considers their applications in operator theory, analyzes zero sets of subsymmetric polynomials, introduces the class of proto-subsymmetric functions, and obtains results concerning approximation and differentiation of subsymmetric functions.

In Subsection 2.1 properties of algebras of subsymmetric polynomials on Banach spaces with a subsymmetric basis are investigated. Particular attention is focused on the algebra of subsymmetric polynomials $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ on the space ℓ_p . Questions of equivalence of elements $x, y \in \ell_p$ with respect to the values of subsymmetric polynomials are considered, and the corresponding criteria are established. In addition, homomorphisms of this algebra are investigated, and extensions of subsymmetric polynomials preserving their main properties are constructed.

In Subsection 2.2 extensions of subsymmetric functions to wider classes of spaces are considered. Extensions of subsymmetric polynomials are constructed and conditions for preserving their main properties, in particular isometricity, are investigated.

In Subsection 2.3 examples of subsymmetric polynomials in functional Hilbert spaces are presented. Concrete constructions of such polynomials are considered and their properties within functional Hilbert spaces are analyzed.

In Subsection 2.4 applications of subsymmetric polynomials to operator theory are considered. It is shown that polynomials from the class $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ can be used to describe spectral properties of operators. In this case, algebraic properties of subsymmetric polynomials are related to operator-theoretic problems.

In Subsection 2.5 zero sets of subsymmetric polynomials on the space X are considered. Their structural properties in infinite-dimensional spaces are investigated, and it is shown that kernels of such polynomials have a nontrivial structure.

In Subsection 2.6 algebras of subsymmetric polynomials are investigated. Properties of the corresponding algebras, their homomorphisms, and factoriality properties are considered. It is proved that on the complex space ℓ_p with a

subsymmetric kernel will be subsymmetric.

In Subsection 2.7 the class of proto-subsymmetric functions is introduced and its main properties are investigated. It is shown that this class is related to subsymmetric polynomials and analytic functions, while at the same time being broader than the class of standard subsymmetric functions.

In Subsection 2.8 results on approximation of subsymmetric functions by polynomials of the corresponding type are obtained. Conditions under which functions with subsymmetric properties can be approximated by polynomials from the algebra $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ or related classes are considered.

In Subsection 2.9 derivatives associated with subsymmetric functions are investigated. The derivatives ∂_L , ∂_R and ∂_M , consistent with the operation of subsymmetric shift, are introduced, and their relation to the Gateaux derivative is established.

The third chapter is devoted to the study of the dynamics of operators associated with symmetric and subsymmetric structures. The main attention is paid to the construction of metric structures on sets of multisets and ordered multisets, as well as to the investigation of topological transitivity and mixing properties of the corresponding operators.

In Subsection 3.1 a metric on the set of multisets \mathcal{M}_X^+ is constructed and its main properties are investigated. It is shown that this metric is compatible with algebraic operations on the space of multisets and can be used for the analysis of convergence, continuity, and dynamical behavior of the corresponding mappings.

In Subsection 3.2 a metric on the set of ordered multisets \mathfrak{M}_X is constructed and its connection with the algebraic and topological structure of this space is established.

In Subsection 3.3 the backward shift operator $\mathfrak{T}_\lambda : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$ on the space of multisets is investigated, and conditions for its topological transitivity are established.

In Subsection 3.4 the backward shift operator \tilde{B}_λ on the space of ordered

multisets is considered and its topological transitivity is investigated.

In Subsection 3.5 Kitai's criterion is applied to differentiation operators and left inverses associated with algebras of subsymmetric functions. Conditions for mixing and chaoticity of the corresponding operators are obtained.

Key words: space of entire functions, spaces of summable sequences, functions of the first Baire class, polynomial on a Banach space, symmetric polynomial, subsymmetric polynomial, subsymmetric function, approximation by polynomials, multiset, ordered multiset, metrizable topological space, backward shift linear operator, differentiation operator, topological transitivity, chaoticity.

Список публікацій здобувача, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Dolishniak D. Y., Zagorodnyuk A. V. Metric Semigroups and Groups of Multisets // Res. Math.— 2024. — Vol. 32, № 3. — P. 12 – 25.
DOI: <https://doi.org/10.15421/242430>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85219050259?origin=resultslist>
2. Bihun V., Dolishniak D., Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. Subsymmetric Polynomials on Banach Spaces and Their Applications // Mathematics – 2025. – 13(22), 3693.
DOI: <https://doi.org/10.3390/math13223693>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105023129716?origin=resultslist>
3. Dolishniak D., Kravtsiv V. Subsymmetric Functions on Banach Spaces With Subsymmetric Bases // Carpathian Math. Publ. – 2026. – Vol. 18, № 1. — P. 49 – 66.
DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.18.1.49-66>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105033768287?origin=resultslist>

Список публікацій здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (Rome, Italy, 18th July, 2023): book of abstracts — Rome, Italy. — 2023. — P. 45 – 48.
2. Daryna Dolishniak Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 28–30 вересня)

- сня 2023 р.): тези допов. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2023. — С. 35 – 36.
3. Dolishniak D., Dolishniak P., Zagorodnyuk A. Nonlinear backward shifts on the ring of multisets // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.): тези допов. — Чернівці. — 2024. — С. 123.
 4. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk, Pavlo Dolishniak Topological transitivity of a nonlinear backward shift // International Workshop on Modern Problems of Analysis, Optimization, Approximation and Their Applications (Rome, Italy, 25 – 27 June, 2025): book of abstracts. — Rome, Italy. — 2025. — P. 85 – 87.
 5. Vitaliy Bihun, Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk Zeros of susymmetric polynomials on ℓ_p // XII International Skorobohatko Mathematical Conference (September 23-25): book of abstracts. — Lviv, Ukraine. — 2025. — P. 8.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	18
ВСТУП	20
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ.....	32
1.1. Огляд літератури	32
1.2. Попередні відомості.....	40
1.2.1. Поліноми та аналітичні функції на банахових просторах . .	40
1.2.2. Банахові простори з симетричним та субсиметричним базисом	43
1.2.3. Симетричні поліноми та аналітичні функції	45
1.2.4. Субсиметричні функції	46
1.2.5. Мультимножини, пов'язані з симетричними поліномами . .	48
1.2.6. Основи динамічних систем у метричних просторах	50
РОЗДІЛ 2. СУБСИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ	53
2.1. Властивості субсиметричних поліномів	53
2.2. Продовження субсиметричних функцій	61
2.3. Приклади субсиметричних поліномів у функційних гільбертових просторах	67
2.4. Застосування субсиметричних поліномів у оберненій спектральній задачі теорії нормальних операторів	71
2.5. Нулі субсиметричних поліномів	74
2.6. Алгебри субсиметричних поліномів	81
2.7. Прото-субсиметричні функції	85
2.8. Апроксимація субсиметричних функцій	88
2.9. Похідні, пов'язані із субсиметричними функціями	94
РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА ОПЕРАТОРІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З СИМЕТРИ- ЧНИМИ ТА СУБСИМЕТРИЧНИМИ СТРУКТУРАМИ	99
3.1. Метрика на множині мультимножин	99
3.2. Метрика на множині впорядкованих мультимножин	110
3.3. Оператор лівого зсуву у просторі мультимножин	114

	17
3.4. Оператор лівого зсуву у просторі впорядкованих мультимножин .	118
3.5. Змішуваність операторів диференціювання та лівих обернених до операторів	121
ВИСНОВКИ	129
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	132
ДОДАТКИ	139

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ —	множини всіх натуральних, дійсних, комплексних чисел відповідно
ℓ_p —	банахів простір усіх числових послідовностей $x = (x_n)$, для яких $\sum_{n=1}^{\infty} x_n ^p < \infty$, $1 \leq p < \infty$
c_{00} —	простір усіх послідовностей, що мають скінченну кількість ненульових координат
$\ell_p(\mathfrak{A})$ —	банахів простір, індексований цілком впорядкованою множиною \mathfrak{A}
E —	сепарабельний гільбертовий простір
$E \wedge E$ —	замкнутий підпростір гільбертового тензорного добутку $E \otimes E$
$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ —	стандартні субсиметричні поліноми
$\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ —	алгебра всіх неперервних субсиметричних поліномів на ℓ_p
$\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(X)$ —	алгебра субсиметричних поліномів на просторі X
$H_{\mathfrak{S}b}(X)$ —	алгебра Фреше всіх симетричних цілих комплекснозначних аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X
$H_{\mathfrak{S}b}(\ell_p)$ —	алгебра Фреше всіх відповідних цілих комплекснозначних аналітичних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_p
δ_x —	функціонал обчислення значення в точці x
$\delta_{\tilde{x}}, \delta_{x \triangleleft y}, \delta_{\tilde{x} \triangleleft y}$ —	комплексні гомоморфізми
\mathcal{M}_X —	множина мультимножин над простором X
(\mathcal{M}_X, d) —	метричний простір на множині мультимножин

- (\mathcal{M}_X, ρ) — сепарабельний метричний простір на множині мультимножин
- \mathfrak{M}_X — множина впорядкованих мультимножин ненульових чисел над простором X
- (\mathfrak{M}_X, d) — метричний простір на множині впорядкованих мультимножин
- \mathcal{R}_X^+ — підмножина множини \mathcal{M}_X визначена у вигляді $\mathcal{R}_X^+ = \{[x] \in \mathcal{M}_X^+ : x \in \ell_1^+\}$
- (\mathcal{R}_X^+, d) — метрична напівгрупа
- \mathfrak{T}_λ — оператор лівого зсуву в просторі мультимножин \mathcal{R}_X^+
- \tilde{B}_λ — оператор лівого зсуву в просторі впорядкованих мультимножин \mathfrak{M}_X визначений за формулою $\tilde{B}_\lambda([x]) = B_\lambda(\hat{x})$

ВСТУП

Актуальність теми. Теорія поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах є одним із важливих напрямів сучасного нелінійного функціонального аналізу. Особливе місце в ній займають поліноми, які є інваріантними відносно деякої групи або напівгрупи ізометричних перетворень банахового простору (так звані симетричні, субсиметричні, блочно-симетричні, суперсиметричні поліноми і аналітичні функції). У цій теорії поєднано ідеї класичної алгебри, теорії інваріантів, комбінаторики, теорії банахових просторів і нескінченновимірного аналізу. Дослідження таких поліномів та породжених ними алгебр аналітичних функцій розглядалося у працях багатьох математиків, зокрема Р. Арона, П. Галіндо, Р. Гонзало, П. Хаєка, А. Загороднюка, І. Чернеги, Т. Василичина, С. Василичин, В. Кравців, Ф. Джавад, Ю. Чоп'юка та інших. У дослідженнях цих авторів вивчалися різні класи симетричних, субсиметричних, суперсиметричних і блочно-симетричних функцій, алгебраїчні базиси та спектри (множини характеристик) для відповідних алгебр поліномів та аналітичних функцій, оператори і гомоморфізми в цих алгебрах. Результати вказаних досліджень знайшли застосування у суміжних галузях топології та аналізу, а також у криптографії і квантовій механіці. Це демонструє перспективність вивчення симетричних і субсиметричних структур, що виникають в алгебрах поліномів на банахових просторах.

Історично, дослідження симетричних поліномів проводилось в межах класичної алгебри та комбінаторики, проте у другій половині ХХ століття, ці ідеї були перенесені в нескінченновимірний аналіз. На сучасному етапі цей напрям не обмежується лише алгебраїчними питаннями, а й охоплює топологічні, спектральні, метричні та динамічні властивості, які розширюють можливості застосування отриманих результатів. Тому в ХХІ столітті особливої уваги набувають дослідження, що поєднують структурні властивості симетричних і субсиметричних поліномів із вивченням нелінійних операторів і відповідних динамічних систем. Такі дослідження проводили-

ся в роботах С. Василюшин, З. Новосад, А. Загороднюка, І. Чернеги, О. Голубчака. Зокрема, у працях вказаних авторів доведено гіперциклічність оператора симетричного зсуву та симетричного диференціювання в алгебрах симетричних функцій обмеженого типу на просторах ℓ_p .

Напівгрупа субсиметричних перетворень не має аналогів у скінченновимірних просторах. Алгебра субсиметричних поліномів включає в себе алгебру симетричних поліномів, але при цьому має загальніший вигляд. Таким чином, субсиметричні поліноми і пов'язані з ними аналітичні функції дають змогу розширити клас досліджуваних інваріантних функцій. Якщо симетричні функції є інваріантними відносно перестановок координат, то субсиметричні функції виникають на банахових просторах із субсиметричним базисом і є інваріантними відносно напівгрупи правих зсувів та відображають властивості таких просторів. Тому важливими є задачі опису алгебраїчних та аналітичних властивостей субсиметричних поліномів і аналітичних функцій, їхніх нулів, апроксимації та похідних, а також дослідження операторів, пов'язаних із цими класами функцій.

Одним із методів теорії симетричних і субсиметричних поліномів є перехід до мультимножин. Вони виникають при ототожненні елементів простору, що не розрізняються відповідними значеннями інваріантних поліномів. Якщо $x, y \in X$ і $P(x) = P(y)$ для всіх поліномів P із певного класу, то елементи x і y можна розглядати як еквівалентні, а їхні класи еквівалентності утворюють фактор-простір X/\sim . Поняття мультимножин та пов'язані з ними структури розглядалися в роботах Р. Дедекінда, К. Вейерштрасса, Д. Кнута, Р. Меєра, М. Макроббі, а в сучасному аналізі та його застосуваннях – у працях Н. Вівера, Д. Кіма, С. Міямото, Р.-М. Чена, І. Чернеги, Т. Василюшина, А. Загороднюка, Ю. Чоп'юка, В. Кравців та їхніх співавторів. Простори мультимножин і впорядкованих мультимножин є важливими об'єктами дослідження, оскільки за допомогою них можна описувати відповідні алгебраїчні та топологічні властивості, пов'язані з інваріантними поліномами та аналітичними функціями.

Актуальність теми зумовлена також необхідністю побудови метрики на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин, узгоджених з їхніми алгебраїчними операціями. Метрика є важливою для коректного дослідження неперервності операторів, збіжності послідовностей, щільності орбіт та інших властивостей, що є основою для топологічної динаміки. Наприклад, якщо \mathcal{M} – простір мультимножин, d – метрика на \mathcal{M} , а $T : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ – відображення, то можна розглядати орбіти вигляду $\text{Orb}(x, T) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}$ та досліджувати їх топологічні властивості. Вивчення метричних напівгруп і груп мультимножин, а також побудова алгебраїчних структур на мультимножинах представлено у роботах І. Чернеги, А. Загороднюка, Т. Василюшина, Ю. Чоп'юка.

У сучасній теорії операторних динамічних систем є важливими поняття топологічної транзитивності, гіперциклічності та хаотичності. Дослідження цих властивостей дозволяють встановити, наскільки складною є ітераційна поведінка оператора, чи має щільні орбіти, чи є динаміка хаотичною. Для лінійних операторів на банахових просторах і просторах Фреше відповідні задачі розглядалися в працях Г. Біркгофа, С. Ролевича, Ч. Кітаї, А. Періса, А. Мануссоса, Х. Беса та інших. Однак для нелінійних операторів, пов'язаних із симетричними, субсиметричними функціями та простором мультимножин, ці задачі вивчені менше. Тому дослідження топологічної транзитивності та хаотичності операторів, пов'язаних із симетричними та субсиметричними поліномами, є актуальним.

Особливий інтерес у цьому напрямі становлять оператори лівого зсуву на просторах мультимножин та впорядкованих мультимножин, а також оператори диференціювання, пов'язані з алгебрами субсиметричних функцій. Для таких операторів важливим є встановлення умов топологічної транзитивності, хаотичності, а також застосування критерію Кітаї. Якщо T – оператор у метричному просторі M , то суттєвим є встановлення умов, за яких довільних непорожніх відкритих множин $U, V \subset M$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. У суміжних дослідженнях ці властивості розгляда-

лися для операторів композиції, гіперциклічності на алгебрах симетричних функцій, а також для зсувopodobних операторів у роботах І. Чернеги, О. Голубчака, З. Новосад, А. Загороднюка та ін. Тому є сенс вивчати динамічні властивості нелінійних операторів на просторах мультимножин.

Дане дисертаційне дослідження поєднує кілька сучасних напрямів математики: теорію поліномів на банахових просторах, теорію субсиметричних аналітичних функцій, метричну теорію мультимножин та теорію динамічних операторних систем. Таке поєднання дає змогу не лише поглибити вже відомі результати про симетричні і субсиметричні поліноми, а й одержати нові результати про поведінку нелінійних операторів у просторах, породжених цими структурами. У дисертаційній роботі продовжено дослідження субсиметричних поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах, а також метричних структур на множинах мультимножин, впорядкованих мультимножин та дослідження динаміки операторів лівого зсуву в цих просторах. Отримані результати розвивають теорію інваріантних поліномів, фактор-просторів і динамічних властивостей відповідних операторів, що і визначає наукову актуальність дисертаційного дослідження.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в межах реалізації наукового проєкту “Аналіз на спектрах зліченно породжених алгебр симетричних поліномів і можливі застосування у квантовій механіці та інформатиці” (реєстраційний номер проєкту 2023.03/0198, термін виконання 2024-2026 р.р.). Дисертаційне дослідження стало фрагментом даної науково-дослідної роботи.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження субсиметричних поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах, метричних структур на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин, а також динамічних властивостей операторів, пов'язаних із симетричними та субсиметричними структурами. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- дослідити властивості алгебр субсиметричних поліномів на банахових просторах X із субсиметричним базисом;
- дослідити можливості продовження субсиметричних поліномів на ширші класи просторів зі збереженням їхніх основних властивостей;
- дослідити гомоморфізми алгебр субсиметричних поліномів;
- дослідити субсиметричні поліноми у функційних гільбертових просторах Харді та просторах, породжених поліномами Чебишова;
- встановити застосування субсиметричних поліномів у спектральній теорії операторів;
- дослідити множини нулів субсиметричних поліномів на банахових просторах та встановити їхні властивості;
- розглянути і дослідити клас прото-субсиметричних функцій, а також з'ясувати їхній зв'язок із субсиметричними поліномами та аналітичними функціями;
- довести результати про апроксимацію субсиметричних функцій та встановити умови наближення таких функцій відповідними поліномами;
- дослідити похідні, пов'язані із субсиметричними функціями, та встановити їхні основні властивості;
- побудувати метрику d на множині мультимножин \mathcal{M}_X^+ , узгоджену з алгебраїчними операціями на \mathcal{M}_X^+ , та дослідити її основні метричні й топологічні властивості;
- побудувати метрику на множині впорядкованих мультимножин \mathfrak{M}_X і дослідити її зв'язок з алгебраїчною та топологічною структурою простору;

- дослідити оператор лівого зсуву $\mathfrak{T}_\lambda : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$ у просторі мультимножин та встановити умови, за яких для довільних непорожніх відкритих множин U, V в \mathcal{R}_+^X існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що $\mathfrak{T}_\lambda^n(U) \cap V \neq \emptyset$;
- дослідити оператор лівого зсуву у просторі впорядкованих мультимножин та встановити умови його топологічної транзитивності;
- дослідити оператори диференціювання, пов'язані із субсиметричними функціями, та встановити умови їх змішаності і хаотичності.

Об'єктом дослідження є субсиметричні поліноми, аналітичні функції на банахових просторах, простори мультимножин і впорядкованих мультимножин та оператори, пов'язані з цими структурами.

Предметом дослідження є алгебраїчні, аналітичні та динамічні властивості субсиметричних поліномів і пов'язаних з ними функцій, а також властивості метрик на мультимножинах і впорядкованих мультимножинах та умови топологічної транзитивності і хаотичності відповідних операторів.

Методи дослідження. Для розв'язування поставлених задач використано методи нелінійного функціонального аналізу та абстрактної алгебри. Зокрема, для дослідження властивостей субсиметричних поліномів і пов'язаних з ними аналітичних функцій використано методи функціонального та поліноміального аналізу. У процесі побудови метрик на мультимножинах і впорядкованих мультимножинах застосовано метод дослідження алгебраїчних структур. Для встановлення динамічних властивостей операторів лівого зсуву та диференціювання використано методи теорії динамічних систем, зокрема, критерій Кітаї для топологічної транзитивності.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі результати дисертаційної роботи є новими. У роботі вперше:

- досліджено алгебраїчні властивості алгебри субсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$, встановлено критерій еквівалентності елементів простору ℓ_p через значення субсиметричних поліномів:

Теорема 2.1. Нехай $x, y \in \ell_p$. Тоді $x \simeq y$, якщо існує натуральне число $m \geq [p]$ таке, що $P_n(x) = P_n(y)$ і $P_{n,2n}(x) = P_{n,2n}(y)$ для всіх $n \geq m$. У цьому випадку $P(x) = P(y)$ для кожного субсиметричного полінома P .

Також розглянуто гомоморфізми цієї алгебри, доведено коректність та ізометричність продовження субсиметричних поліномів:

Твердження 2.4. Кожен субсиметричний поліном P на ℓ_p може бути продовжений до полінома $P^{\mathfrak{A}}$ на $\ell_p(\mathfrak{A})$. Оператор продовження $\mathcal{J} : P \mapsto P^{\mathfrak{A}}$ є лінійним, а $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\mathfrak{A}}$ визначений рівністю (2.5).

Твердження 2.5. Для кожного $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$, $\|P\| = \|P^{\mathfrak{A}}\|$;

- одержано застосування субсиметричних поліномів у теорії операторів:

Теорема 2.3. Нехай A і B — нормальні p -ядерні оператори з точковими спектрами і однаковими власними векторами, так що власні значення x_i оператора A і власні значення y_i оператора B є ненульовими. Тоді $A = B$, тоді і тільки тоді, коли існує натуральне число $m \geq [p]$, таке що $\text{tr } A^n = \text{tr } B^n$ і $\text{tr}[(A \wedge A^2)^n] = \text{tr}[(B \wedge B^2)^n]$ для всіх $n \geq m$.

Одержано критерій рівності двох p -ядерних операторів через збіг спектральних інваріантів, виражених субсиметричними поліномами, що дозволило встановити нові властивості субсиметричних поліномів у задачах теорії операторів

- досліджено множини нулів субсиметричних поліномів у нескінченновимірному випадку.

Твердження 2.7. Нехай X — нескінченновимірний комплексний лінійний простір, а P — n -однорідний \mathbb{C} -значний поліном. Для кожного $x_0 \in \ker P$ існує нескінченна лінійно незалежна послідовність $(x^{(k)}) \subset X$ така, що для кожного $m \in \mathbb{N}$,

$$P(t_1 x^{(1)} + t_2 x^{(2)} + \dots + t_m x^{(m)}) = t_1^n P(x^{(1)}) + t_2^n P(x^{(2)}) + \dots + t_m^n P(x^{(m)}),$$

та x_0 належить лінійному підпростору, породженому $(x^{(k)})$.

Це твердження є базовим результатом для дослідження структури ядер n -однорідних поліномів у нескінченновимірних комплексних просторах. Отриманий результат використано для подальшого аналізу множин нулів субсиметричних поліномів та їхніх структурних властивостей у нескінченновимірному випадку;

- введено новий клас прото-субсиметричних функцій, розширено клас субсиметричних аналітичних функцій, що розглядаються на банахових просторах із субсиметричним базисом. Крім того, доведено факторіальність алгебри прото-субсиметричного полінома:

Теорема 2.6. Нехай напівгрупа операторів S на X така, що алгебра $\mathcal{P}_S(X)$ є факторіальною. Тоді алгебра прото- S -інваріантних поліномів також є факторіальною. Зокрема, алгебра прото-субсиметричних поліномів є факторіальною;

- доведено результати про апроксимацію субсиметричних функцій, показано, що стандартні диференціальні та апроксимаційні властивості можна перенести на субсиметричні функції;
- введено нові похідні, узгоджені з операцією субсиметричного зсуву:

Означення 2.2. Субсиметрична функція f на X , що набуває значень в деякому банаховому просторі, називається:

- субсиметрично диференційовною зліва (або ∂_L -диференційовною) за елементом $h \in X$ в точці $x \in X$, якщо існує границя

$$\partial_L f(x)(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th \triangleleft x) - f(x)}{t};$$

- субсиметрично диференційовною справа (або ∂_R -диференційовною) за елементом $h \in X$ у точці $x \in X$, якщо існує границя

$$\partial_R f(x)(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \triangleleft th) - f(x)}{t};$$

– субсиметрично диференційовною в середині (або ∂_M -диференційовною) за елементом $h \in X$ у точках $x, y \in X$, якщо існує границя

$$\partial_M f(x, y)(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \triangleleft th \triangleleft y) - f(x \triangleleft y)}{t},$$

де t – скаляр з поля \mathbb{K} .

Встановлено їхній зв'язок із похідною Гато:

Теорема 2.10. Існують цілком впорядковані множини \mathfrak{A}_R , \mathfrak{A}_L та \mathfrak{A}_M такі, що для всіх x, y та h в X існують $x_R, h_R \in \mathfrak{A}_R$, $x_L, h_L \in \mathfrak{A}_L$ і $x_M, y_M, h_M \in \mathfrak{A}_M$ такі, що для кожної субсиметричної функції f , що набуває значень у деякому банаховому просторі,

$$\partial_R f(x)(h) = df^{\mathfrak{A}_R}(x_R)(h_R),$$

$$\partial_L f(x)(h) = df^{\mathfrak{A}_L}(x_L)(h_L),$$

$$\partial_M f(x, y)(h) = df^{\mathfrak{A}_M}(x_M + y_M)(h_M),$$

тобто, якщо існують похідні $\partial_R f(x)(h)$, $\partial_L f(x)(h)$ і $\partial_M f(x, y)(h)$, то і існують похідні Гато $df^{\mathfrak{A}_R}(x_R)(h_R)$, $df^{\mathfrak{A}_L}(x_L)(h_L)$, $df^{\mathfrak{A}_M}(x_M + y_M)(h_M)$.

Показано, що ці результати дають змогу застосовувати стандартні диференціальні властивості до субсиметричних функцій та отримувати явні формули для таких похідних у випадку стандартних субсиметричних поліномів на ℓ_1 ;

- побудовано метрику на множині мультимножин \mathcal{M}_X^+ , яка є природною областю визначення симетричних поліномів та узгоджену з її алгебраїчними операціями;
- побудовано метрику на множині впорядкованих мультимножин \mathfrak{M}_X , яка є природною областю визначення субсиметричних поліномів, встановлено її зв'язок з алгебраїчною і топологічною структурою простору. Введено метрику, яка дає змогу коректно досліджувати збіжність, неперервність відображень та динамічні властивості операторів на цьому просторі:

Теорема 3.4. Метричний простір (\mathfrak{M}_X, d) не є повним для жодного нескінченновимірного банахового простору X із субсиметричним базисом. Поповнення простору (\mathfrak{M}_X, d) ізометричне простору X , розглянутого з метрикою, породженою нормою простору X ;

- встановлено умови топологічної транзитивності оператора лівого зсуву в просторі мультимножин, для цього використано критерій транзитивності:

Теорема 3.6. Нехай Q — метрична напівгрупа, а T — відображення з Q в себе. Припустимо, що існують щільна підмножина $\Omega \subset Q$ і $\Xi \in Q$, і для кожного $u \in \Omega$ існує число $m \in \mathbb{N}$ та послідовність відображень $S_{u,k}: \Xi \rightarrow Q$, $k \in \mathbb{N}$ такі, що виконуються умови:

- (i) $S_{u,k}(v) \rightarrow 0$ для кожного $v \in \Xi$ при $k \rightarrow \infty$;
- (ii) для кожного $u \in \Omega$, $T^{k+m}[S_{u,k}(v) + u] \rightarrow v$ для кожного $u \in \Omega$ при $k \rightarrow \infty$.

Тоді T є топологічно транзитивним;

- досліджено оператор лівого зсуву \tilde{B}_λ у просторі впорядкованих мультимножин та встановлено умови його топологічної транзитивності:

Теорема 3.8. Якщо $|\lambda| > 1$, то \tilde{B}_λ є топологічно транзитивним на \mathfrak{M}_X .

Новизна цього результату полягає в перенесенні динамічного аналізу з простору мультимножин на простір впорядкованих мультимножин, для якого попередньо побудовано відповідну метрику;

- застосовано критерій Китаї до операторів диференціювання, пов'язаних із алгебрами субсиметричних функцій, та одержано умови змішаності відповідних операторів:

Теорема 3.10. Нехай $h \in \ell_1$ таке, що $P_1(h) > 1$. Тоді оператори

$$\partial_L(\cdot)(h): f \mapsto \partial_L f(\cdot)(h) \quad \text{and} \quad \partial_R(\cdot)(h): f \mapsto \partial_R f(\cdot)(h)$$

є змішуваними на $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$.

Також встановлено хаотичність відповідних операторів:

Теорема 3.11. Оператори ∂_L та ∂_R є хаотичними в просторі $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$.

Новизна цього результату полягає у поширенні методів теорії лінійної динаміки на оператори диференціювання, побудовані за допомогою субсиметричних функцій.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати можна використати в теорії аналітичних функцій на банахових просторах, теорії субсиметричних поліномів, у теорії операторів, зокрема при дослідженні динамічних властивостей, а також у подальшому вивченні метричних структур на мультимножинах і впорядкованих мультимножинах. Одержані результати можуть бути використані також у навчальному процесі при викладанні курсів з функціонального аналізу, теорії операторів, теорії аналітичних функцій на банахових просторах та динамічних систем.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано авторкою самостійно. У публікації [22] А. Загороднюку належать постановка задач та аналіз отриманих результатів. У роботі [7] авторці дисертації належать результати розділів 4 та 6, а також підрозділу 7.2. У публікації [24] А. Загороднюку належать постановка задач, В. Кравців – аналіз отриманих результатів та редагування тексту, результати підрозділу 2.3 належать В. Кравців.

Апробація результатів роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на:

- Міжнародному семінарі з сучасних тенденцій в аналізі та теорії наближень (Рим, Італія, 18 липня 2023 р.);
- Міжнародній науковій конференції, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 28–30 вересня, 2023 р.);

- Міжнародній конференції, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23–27 вересня 2024 р.)
- Міжнародному семінарі з сучасних проблем аналізу, оптимізації, апроксимації та їх застосування (Рим, Італія, 25–27 червня 2025 р.)
- XII міжнародній математичній конференції імені Скоробагатька (Львів, 23–25 вересня 2025 р.);
- Звітних наукових конференціях викладачів, докторантів, аспірантів Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Публікації. Результати дисертації опубліковано у восьми друкованих працях, серед яких: три статті у вітчизняних та закордонних фахових наукових виданнях [7, 22, 24], п'ять – у матеріалах міжнародних наукових конференцій [19–21, 23, 48], три статті опубліковано у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection [7, 22, 24].

Структура та обсяг дисертації. Структура дисертаційної роботи складається із вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка. Повний обсяг роботи становить 140 сторінок друкованого тексту. Список використаних джерел займає 7 сторінок і містить 53 найменування. Додаток займає 2 сторінки, включаючи список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію результатів дисертаційного дослідження.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ І ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

У цьому розділі наведено необхідний теоретичний матеріал. Зроблено огляд результатів досліджень, які стосуються теми дисертації. Усі поняття і твердження, які не належать автору, наведено із зазначенням авторства і відповідного посилання на джерело.

1.1. Огляд літератури

Дослідження симетричних та інваріантних поліномів відіграють важливу роль в теорії інваріантів, алгебрі та аналізі. Історично теорія симетричних поліномів сформувалася в межах класичної алгебри та теорії інваріантів. У другій половині ХХ століття ці ідеї були перенесені в нескінченновимірний аналіз, зокрема в теорію поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах. Наприкінці ХХ – на початку ХХІ століття сформувався напрям дослідження, пов'язаний із симетричними поліномами, алгебрами аналітичних функцій та їх спектрами. У класичному скінченновимірному випадку одним із джерел, є теорія симетричних функцій, розглянута, зокрема, у монографії [38]. У нескінченновимірному випадку ця тематика охоплює дослідження поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах, їхніх алгебраїчних властивостей, спектрів та питань апроксимації, що розглядалося у [32] – [42], [8]. Перехід від класичної теорії до функціонально-аналітичного підходу є одним із ключових напрямів сучасних досліджень у цій галузі.

Значний внесок у розвиток симетричних та інваріантних поліномів на банахових просторах зробили Р. Арон, П. Галіндо, Р. Аленкар, Р. Гонзало, М. Маестре, П. Хаєк, А. Загороднюк, І. Чернега, Т. Васишин, С. Васишин, В. Кравців, Ф. Джавад, які досліджували різні аспекти симетричних, блочно-симетричних, суперсиметричних і субсиметричних поліномів та аналітичних функцій. Їхні результати стосуються алгебраїчних базисів,

спектральних властивостей відповідних алгебр, факторизації симетричних поліномів та застосування цих досліджень в інших напрямках функціонального аналізу.

Якщо простежити розвиток цього напрямку в хронологічному порядку, то можна виділити декілька етапів. У 1970–1990-х роках дослідження зосереджувалися переважно на геометрії банахових просторів, базисних структурах та загальних властивостях поліномів на нескінченновимірних просторах [37], [26], [46]. Нарикінці 1990-х – на початку 2000-х років активізувалися дослідження симетричних поліномів на банахових просторах, зокрема на ℓ_p [1], [27]. Упродовж 2010–2020-х років дослідницький інтерес зосередився на спектрах, алгебрах аналітичних функцій, а також на метричних і динамічних аспектах симетричних та споріднених структур [32], [50]–[15].

Одним із базових напрямів є вивчення симетричних поліномів на лінійних і банахових просторах. Для просторів із гамелевим базисом симетричні поліноми розглядаються як поліноми, інваріантні відносно перестановок базисних векторів, причому степеневі симетричні поліноми утворюють алгебраїчний базис відповідної алгебри. У працях [38], [27] про симетричні та субсиметричні поліноми цей метод досліджено для нескінченновимірних лінійних просторів, зокрема для c_{00} , і далі перенесено на банахові простори із базисом Шаудера, де симетричність формулюється через перестановки координат. Таким чином, симетричні поліноми можна розглядати як модель інваріантних поліномів у нескінченновимірному випадку.

Окремим важливим напрямом стало дослідження алгебраїчних базисів алгебр симетричних поліномів. У класичній теорії важливу роль відіграють елементарні та степеневі поліноми, тоді як у нескінченновимірному випадку на просторах ℓ_p – степеневі суми вигляду

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \quad k \geq [p].$$

Такі поліноми описують алгебраїчні базиси симетричних поліномів на ℓ_p ,

а кожен симетричний поліном можна подати як поліном від скінченної кількості степеневих сум [1], [10], [38]. Такий підхід є важливим, оскільки дозволяє розглядати класичні ідеї теорії симетричних функцій у банахових просторах та описувати відповідні алгебри.

Симетричні поліноми та симетричні аналітичні функції щодо різних груп і напівгруп досліджували багато авторів. У працях [1], [10] розглядалися алгебри симетричних поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах ℓ_p для $1 \leq p < \infty$, а також їх алгебраїчні базиси та їх спектри. У роботах [5], [13], [49] вивчалися блочно-симетричні поліноми на ℓ_p та L_p . Алгебри симетричних аналітичних функцій щодо абстрактних груп операторів досліджувалися в [3], [4]. Отримані результати показують, що симетрична теорія охоплює не лише класичні симетричні поліноми, а й ширші класи інваріантних функцій та відображень.

У цих дослідженнях важливу роль відіграють алгебри симетричних і субсиметричних функцій, які позначаються через $H_b(X)$, $H_{bs}(X)$, $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(X)$. При цьому для $x \in \ell_p$ розглядають функціонал значення в точці

$$\delta_x : P \mapsto P(x),$$

який використовується для опису спектральних властивостей алгебр симетричних і споріднених функцій [9], [10]. Такі позначення є стандартними в теорії симетричних і субсиметричних поліномів на банахових просторах і використовуються для опису алгебраїчної структури.

Не менш важливим напрямом є вивчення спектрів алгебр симетричних аналітичних функцій. Для таких алгебр суттєвим є не лише опис функціоналів значення в точках, а й виявлення нетривіальних комплексних гомоморфізмів, які не зводяться до підстановки до конкретного елемента простору. Тому в працях [9], [10], присвячених алгебрам симетричних аналітичних функцій на ℓ_p , досліджувалися як точкові функціонали

$$\delta_x(P) = P(x),$$

так і більш загальні елементи спектра. Дослідження спектра виявилось

важливим не лише для класифікації гомоморфізмів, а й для розуміння, яким чином симетрія простору впливає на топологію алгебри функцій.

Природним узагальненням симетричних поліномів є субсиметричні поліноми, які виникають на банахових просторах із субсиметричним базисом. Однією з основних праць у цьому напрямі є робота Ракель Гонсало [26], де досліджено мультилінійні форми, субсиметричні поліноми та асимптотичні моделі на банахових просторах. Далі цей підхід вивчався в напрямі досліджень алгебри субсиметричних поліномів, їх множин нулів, факторіальності та застосувань. Для просторів ℓ_1 відіграють важливу роль стандартні субсиметричні поліноми вигляду

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n},$$

які утворюють клас інваріантних поліномів, пов'язаних із субсиметричними базисами. Для просторів ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, виникають питання неперервності таких поліномів, а також опису споріднених алгебраїчних структур. Ці об'єкти є важливими для подальшого дослідження субсиметричних функцій на банахових просторах.

Подальший розвиток цього напрямку пов'язаний із дослідженням субсиметричних аналітичних функцій на банахових просторах із субсиметричним базисом. У працях [4], [25], [49] розглядалися S -інваріантні поліноми щодо різних груп і напівгруп операторів на просторах ℓ_p та L_p , а згодом ці дослідження були продовжені для інших груп і напівгруп у роботі [40], [7]. Для алгебр аналітичних функцій важливими є питання опису спектра, структури комплексних гомоморфізмів та взаємозв'язку між поліноміальними та аналітичними підалгебрами, що було розглянуто в [9], [10]. Крім того, праці [17], [18] присвячені поліноміальним алгебрам на банахових просторах, а роботи [42], [8] – питанням поліноміальної та аналітичної апроксимації.

Важливим є дослідження алгебр аналітичних функцій, породжених зліченими множинами поліномів. Такі алгебри є узагальненням класи-

чних поліноміальних алгебр і дають змогу вивчати спектральні та структурні властивості алгебр, коли породжувальна система не обмежується скінченним набором інваріантних поліномів. У роботах [32], [50] досліджувалися спектри таких алгебр, а також операції на спектрах. Крім того, у [31] розглядалися ізоморфізми деяких алгебр аналітичних функцій обмеженого типу, а в [30], [44] – алгебри, породжені зліченими множинами поліномів та їхні властивості. Такі результати є важливими, оскільки дозволяють розглядати симетричні та споріднені алгебри.

Дослідження симетричних аналітичних функцій виходили і за межі алгебр функцій обмеженого типу. У роботі [15] розглядалися необмежені симетричні аналітичні функції на ℓ_1 і показано, що симетрична теорія охоплює не тільки алгебри типу $H_b(X)$, а й інші класи аналітичних функцій.

Важливим напрямом дослідження є факторний підхід до вивчення симетричних функцій. Якщо X – банахів простір із симетричним базисом, а \sim – відношення еквівалентності, проджене перестановками координат, то симетричні поліноми та аналітичні функції розглядали у [9], [14] як функції на фактор-множині X/\sim . У цьому випадку класи еквівалентності можна інтерпретувати через мультимножини ненульвих координат, а відповідні алгебраїчні операції – через кільця та напівкільця мультимножин, що і представлено у роботах [14], [16].

Факторний підхід є важливим ще й тому, що дозволяє перейти до аналізу класів еквівалентності, породжених симетрією. Якщо $x \sim y$ означає, що x і y відрізняються лише перестановкою координат, то симетричні поліноми стають функціями на фактор-множині X/\sim . У цій моделі виникають мультимножини, для яких можна визначити операції об'єднання та відповідні напівгрупові чи кільцеві структури, наприклад,

$$[x] + [y] = [x \bullet y].$$

Такий метод створює основу для подальшої топологізації просторів і побудови на них динамічних систем.

Із розвитком мультимножин розширювалося і коло їх застосувань.

Зокрема, у праці [29] розглянуто логістичне відображення на кільці мультимножин та запропоновано його застосування в економічних задачах. У роботах [13], [34] представлено суперсиметричні поліноми та відповідні алгебраїчні структури досліджувалися в контексті задач квантової фізики. Ці результати показали, що мультимножини, симетричні та суперсиметричні поліноми є важливими не тільки для функціонального аналізу, а й для прикладних моделей, де поєднуються алгебраїчні та динамічні властивості.

Питання метризації множин мультимножин, пов'язаних із симетрією, виникло у зв'язку з дослідженням не лише їх алгебраїчних, а й топологічних властивостей. У попередніх роботах [9], [14], [16], у яких досліджувалися напівкільцеві та кільцеві структури, фактично було закладено основу для такого переходу, оскільки мультимножини розглядалися як носії алгебраїчних операцій. Вивчення симетричних функцій на фактор-множинах в [9], [14] показало, що для подальших досліджень важливим стає топологізація таких множин та побудови на них метрик.

Поряд із цим розвивається метричний підхід до симетричних функцій. У праці [40] досліджувалися ліпшицеві симетричні функції на банахових просторах із симетричним базисом і показано, що симетричність може розглядатися не тільки в межах поліноміальних або аналітичних класів функцій, а й у ширшому метричному контексті. Важливим джерелом для такого підходу є монографія [51], присвячена ліпшицевим алгебрам. У цьому випадку побудова метрик є продовженням уже наявних досліджень симетричних функцій у метричних просторах.

Сучасний етап дослідження – це зближення теорії інваріантних функцій з лінійною та нелінійною динамікою. Якщо раніше симетричні поліноми розглядалися переважно як алгебраїчні або спектральні об'єкти, то в сучасних дослідженнях виступають основою для побудови операторів і напівгруп на банахових просторах. Ця проблематика розглядалася у працях на початку XXI століття, де поряд з алгебраїчними властивостями вивчаються транзитивність, гіперциклічність та хаотичність [28], [39], [47], [52], [12].

Інтерес до операторів зсуву в теорії динамічних систем пояснюється тим, що вони є одними з найпростіших, але водночас важливі моделі гіперциклічної поведінки. Для класичного зсуву ліворуч

$$B_\lambda: (x_1, \dots, x_n, \dots) = \lambda(x_2, \dots, x_n, \dots)$$

виникають фундаментальні явища, пов'язані з транзитивністю та хаотичністю, тому результати про зсувоподібні оператори відіграють важливу роль для подальшого аналізу нелінійних відображень [47]. Оператори зсуву виконують роль базових моделей, на яких перевіряються загальні динамічні критерії.

У широкому контексті динаміки операторів важливими є поняття орбіти, гіперциклічності, топологічної транзитивності та хаотичності, які викладені у монографії [28]. Однією з перших праць у цьому напрямі є робота С. Ролевича [47], у якій розглядалися орбіти елементів і топологічна транзитивність зсуву назад у відповідних просторах. Подальші дослідження пов'язані із загальними критеріями топологічної транзитивності на повних метричних просторах в [39], а також із вивченням зсувоподібних операторів на несепарабельних гільбертових просторах в [45], [52]. Отримані результати сформувавши загальний підхід до подальшого дослідження нелінійних аналогів зсувів на інших просторах і фактор-структурах. Окремо слід відзначити, що питання динаміки досліджувалося не лише для лінійних операторів, а й для операторів, що на алгебрах симетричних аналітичних функцій. Зокрема, у роботі [12] розглядали неперервність і гіперциклічність операторів композиції на алгебрах симетричних аналітичних функцій на банахових просторах. Поряд із топологічною транзитивністю та гіперциклічністю в теорії динаміки важливе місце посідає також властивість топологічного змішування. У класичній лінійній динаміці змішування, гіперциклічність та інші властивості розглядаються як ключові властивості складної поведінки операторів [6], [28].

Отже, сучасні дослідження у цій галузі поєднують алгебраїчний, функціональний, метричний і динамічний методи до вивчення симетричних та

субсиметричних функцій. Саме в цьому напрямі розглядаються задачі, що представлені в дисертаційній роботі.

1.2. Попередні відомості

У цьому розділі наведено основні поняття, означення та відомі результати, що використовуються надалі в дисертаційній роботі. Спочатку розглядаються поліноми та аналітичні функції на банахових просторах, далі – простори з симетричним і субсиметричним базисом, а також відповідні класи симетричних і субсиметричних функцій. Окрему увагу приділено мультимножинам як факторній моделі для симетричних функцій. Також представлено необхідні відомості з теорії динамічних систем, що становлять основу для топологічної транзитивності операторів, розглянутих у наступних розділах.

1.2.1. Поліноми та аналітичні функції на банахових просторах

Теорія поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах є одним із важливих напрямів сучасного нелінійного функціонального аналізу. Вона поєднує методи теорії банахових просторів, комплексного аналізу в нескінченновимірних просторах та алгебраїчної теорії інваріантів. У цій теорії поліноми виступають аналогом скінченновимірних алгебраїчних функцій, а аналітичні функції – відображення, що дає змогу досліджувати функції на банахових просторах.

Нехай X і Y – банахові простори. Відображення $P_n: X \rightarrow Y$ називається n -однорідним поліномом, якщо існує n -лінійне відображення \bar{P}_n з декартового добутку $X^n = X \times \cdots \times X$ в Y таке, що $P(x) = \bar{P}_n(x, \dots, x)$. Скінченна сума однорідних поліномів $P(x) = P_0(x) + P_1(x) + \cdots + P_m(x)$ називається поліномом степеня m , де $P_m \neq 0$. В цьому випадку P_0 є сталою функцією в Y . Таке означення узагальнює класичне поняття полінома на нескінченновимірний випадок і є базовим для подальшого розгляду алгебр поліномів на банахових просторах.

Відомо, що поліном на банаховому просторі є неперервним тоді і тільки тоді, коли він обмежений на кожній обмеженій підмножині простору X .

Норма неперервних поліномів з X в Y визначається як

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|P(x)\|.$$

Нормована структура простору неперервних поліномів дає можливість досліджувати не лише алгебраїчні, а й топологічні властивості відповідних функцій.

Нехай \mathcal{O} – відкрита множина простору X . Функція $f: X \rightarrow Y$ називається аналітичною (у комплексному випадку), якщо для кожної точки $x \in \mathcal{O}$ існує послідовність неперервних n -однорідних поліномів g_n таких, що

$$g(y) := f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) \quad (1.1)$$

для всіх y , $\|y\| < r_x$, де $r_x > 0$ є радіусом рівномірної збіжності розкладу в ряд Тейлора (1.1),

$$r_x(f) = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|^{1/n} \right)^{-1}.$$

Отже, аналітичні функції на банахових просторах локально описуються степеневими рядами з однорідних поліномів, подібно до класичної теорії функцій однієї чи багатьох комплексних змінних.

У випадку, коли X і Y є комплексними банаховими просторами, тоді g є обмеженим на кулі $r\mathcal{B} = \{y: \|y\| < r\}$ для кожного $r < r_x$ та необмеженим (невизначеним) на $r\mathcal{B}$, якщо $r > r_x$. Ця властивість пов'язує аналітичність функції з її радіусом локального степеневого розкладу і є важливою для дослідження областей голоморфності в нескінченновимірному випадку.

Функція на комплексному банаховому просторі X називається цілою, якщо вона аналітична на всьому просторі X . Ціла функція називається функцією обмеженого типу, якщо вона обмежена на кожній обмеженій підмножині простору X . Еквівалентно, f є цілою, якщо радіус рівномірної збіжності f в нулі є нескінченним. Якщо f не є обмеженого типу, то кажуть, що f функція необмеженого типу.

Сукупність усіх цілих аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X позначають через $H_b(X)$. Цей простір є алгеброю

Фреше відносно топології рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Якщо f є аналітичною в деякому околі нуля $r\mathcal{B}$, то її розклад у ряд Тейлора на $r\mathcal{B}$ має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

та n -однорідні поліноми f_n можна виразити як

$$f_n(x) = \frac{n!}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}x) d\theta. \quad (1.2)$$

Ця формула є важливою, оскільки дає змогу виділити однорідні складові аналітичної функції та досліджувати їх окремо. Якщо f є S -інваріантною відносно напівгрупи S лінійних операторів на X , то з (1.2) випливає, що кожен n -однорідний поліном f_n є також S -інваріантним. Також, позначивши

$$df(x)(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tz) - f(x)}{t}$$

похідну Гато функції f в точці x в напрямку z , і

$$d^n f(x)(z) = d(\cdots (df(x)(z))(z) \cdots),$$

відповідно n -ту похідну Гато, маємо, $f_n(z) = d^n f(x)(z)/n!$ і, отже, для f можна записати формулу Тейлора у такому вигляді:

$$f(x + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f(x)(z)}{n!}.$$

Кожному дійсному банаховому простору X можна поставити у відповідність його комплексне розширення (комплексифікацію) $X^{\mathbb{C}}$, що складається з векторів $\{(x, y) = x + iy : x, y \in X\}$, де

$$\|(x, y)\| = \|x + iy\| = \sup_{\substack{\phi \in X^*, \\ \|\phi\|=1}} \sqrt{(\phi(x))^2 + (\phi(y))^2}$$

Більше того, якщо h – дійсна функція, визначена на відкритій множині дійсного простору X , яка є аналітичною в деякій точці x з радіусом

збіжності $r_x > 0$ у цій точці, то існує комплекснозначна функція $h^{\mathbb{C}}$ визначена на відкритій множині комплексифікації $X^{\mathbb{C}}$, яка є аналітичною в точці $(x, 0) \in X^{\mathbb{C}}$ з радіусом збіжності щонайменше $r_x/2e$ та така, що обмеження $h^{\mathbb{C}}$ на X дорівнює h [8]. Це дає змогу застосувати методи комплексного аналізу до задач на дійсних банахових просторах.

Таким чином, поліноми та аналітичні функції на банахових просторах є основними об'єктами дослідження в нескінченновимірному аналізі. Поліноми визначаються через скінченні суми однорідних поліномів, а аналітичні функції – як відображення, що подаються через розклади в ряди однорідних поліномів. Серед аналітичних функцій особливу роль відіграє алгебра $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу, оскільки її елементи допускають розклади у ряди Тейлора, які рівномірно збігаються на обмежених множинах. Саме ці поняття використовуються далі при розгляді симетричних та субсиметричних функцій.

1.2.2. Банахові простори з симетричним та субсиметричним базисом

При дослідженні симетричних і субсиметричних поліномів, аналітичних функцій на банахових просторах важливу роль відіграє базис, який узгоджений з відповідними перетвореннями координат. Саме властивості базису визначають, які перестановки, вкладення або зсуви координат зберігають структуру простору, які класи інваріантних функцій можна розглядати. У симетричному випадку розглядають інваріантність відносно довільних перестановок координат, у субсиметричному випадку – інваріантність відносно переходу до зростаючих підпослідовностей базису.

Нехай X – банахів простір. Послідовність векторів (e_n) , $n \in \mathbb{N}$ називається базисом Шаудера простору X , якщо вона лінійно незалежна і кожен $x \in X$ можна однозначно подати як

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n, \quad x_n \in \mathbb{C}, \quad (1.3)$$

де ряд (1.3) збігається в просторі X . Наявність базису Шаудера дає змогу описувати елементи простору за допомогою координат, що є фундаментальним для введення симетричних і субсиметричних класів функцій.

Базис Шаудера (e_n) називається безумовним, якщо (1.3) збігається безумовно для всіх $x \in X$. Ця властивість означає, що збіжність ряду не порушується при перестановці координат, тому безумовність є однією з умов у побудові субсиметричних базисів.

Базис Шаудера (e_n) називається симетричним, якщо для кожного бієктивного відображення (перестановки) $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, еквівалентний базису $(e_{\sigma(n)})$, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{\sigma(n)}$ збігається. Таким чином, симетричний базис забезпечує інваріантність простору відносно довільних перестановок координат. Саме на таких просторах природно розглядати симетричні поліноми та аналітичні функції.

Базис Шаудера (e_n) називається поширювано-інваріантний, якщо для кожного зростаючого відображення $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ є еквівалентним базису $(e_{\sigma(n)})$. На відміну від симетричного базису, у цьому випадку розглядається інваріантність лише відносно зростаючих відображень множини індексів.

Базис Шаудера (e_n) називається субсиметричним, якщо він є одночасно безумовним і поширювано-інваріантним (див. [17,37]). Субсиметричний базис поєднує збіжність базисного розкладу та інваріантність відносно зростаючих вкладень множини індексів. За допомогою банахових просторів із субсиметричним базисом можна досліджувати субсиметричні функції.

Добре відомо, що не кожен сепарабельний банахів простір має базис Шаудера. Проте, кожен лінійний простір має базис Гамеля (або лінійний базис). Лінійно незалежна сім'я векторів (e_γ) , де γ пробігає деяку множину індексів Γ називається базисом Гамеля у лінійному просторі X якщо кожен вектор цього простору можна подати у вигляді скінченної лінійної комбінації векторів (e_γ) . Відомо, що кожен лінійно незалежну послідовність векторів у X можна доповнити до деякого базису Гамеля в X .

Отже, банахові простори симетричним та субсиметричним базисом

утворюють два природні класи просторів, на яких досліджуються відповідні інваріантні поліноми й аналітичні функції. У першому випадку важливою є інваріантність відносно довільних перестановок координат, а у другому – поєднання безумовності базису з інваріантністю відносно переходу до зростаючих підпоследовностей. Саме ці структурні властивості є основою для дослідження симетричних поліномів та аналітичних функцій, а також субсиметричних функцій.

1.2.3. Симетричні поліноми та аналітичні функції

Симетричні поліноми на банахових просторах є узагальненням класичних симетричних поліномів багатьох змінних. У просторі ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, симетричність розуміють як інваріантність відносно перестановок координат. Відповідно, симетричні аналітичні функції є аналітичними функціями, значення яких не змінюється при перестановці координат. Такі поліноми і функції утворюють важливий клас інваріантних функцій, тісно пов'язаний зі структурою простору та алгеброю інваріантів.

У теорії симетричних поліномів на ℓ_p важливу роль відіграють степеневі суми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k, \quad k \geq [p].$$

Ці поліноми називаються симетричними та утворюють алгебраїчний базис в алгебрі симетричних поліномів на ℓ_p . $[p]$ – це верхня ціла частина числа p , а банахів простір ℓ_p складається з векторів $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$ таких, що

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Іншими словами, для кожного симетричного полінома P степеня n на ℓ_p існує єдиний поліном $q(t_1, \dots, t_{n-[p]+1})$ від $n - [p] + 1$ змінних такий, що

$$P(x) = q(P_{[p]}(x), \dots, P_n(x)), \quad x \in \ell_p.$$

Поряд із симетричними поліномами розглядають і симетричні аналітичні функції. Аналітичну функцію $f: \ell_p \rightarrow \mathbb{C}$ називають симетричною,

якщо для кожної перестановки $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ і кожного $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$ виконується рівність

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots).$$

Алгебри симетричних аналітичних функцій на цих просторах досліджувалися у багатьох роботах [1, 4, 10], при цьому вивчалися їхні алгебраїчні та спектральні властивості. Зокрема, окрему увагу приділено алгебрам симетричних аналітичних функцій обмеженого типу, які є симетричним аналогом алгебри $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу. У такому випадку симетричні аналітичні функції є природним продовженням симетричних поліномів, оскільки інваріантність відносно перестановок координат узгоджується з розкладом аналітичної функції в ряд Тейлора.

Отже, симетричні поліноми та симетричні аналітичні функції становлять важливий клас інваріантних функцій на просторах ℓ_p . Симетричні поліноми на цих просторах представлені через степеневі суми $P_k(x)$, які утворюють алгебраїчний базис відповідної алгебри. Це створює підґрунтя для подальшого дослідження алгебр симетричних аналітичних функцій та їх властивостей.

1.2.4. Субсиметричні функції

Поняття субсиметричних функцій виникає як узагальнення симетричних функцій для банахових просторів із субсиметричним базисом. На відміну від симетричного випадку, де інваріантність задається групою перестановок координат, у субсиметричному випадку розглядають інваріантність відносно напівгрупи операторів, що відповідають переходу до підпослідовностей, які зберігають порядок індексів. Такий підхід дає змогу досліджувати ширший клас поліномів та аналітичних функцій на просторах ℓ_p , $1 \leq p < \infty$ та інших просторах з субсиметричним базисом.

Позначимо через \mathfrak{S} напівгрупу, породжену наступною послідовністю лінійних операторів \mathcal{C}_j , $j \in \mathbb{N}$ на банаховому просторі X з субсиметричним

базисом:

$$\mathcal{C}_j: (x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, x_{j+1}, \dots), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Для заданої послідовності $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots) \subset \mathbb{N}$ позначимо

$$\mathcal{C}_{\mathbf{n}}: x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{n_k}.$$

Нехай $\overline{\mathfrak{S}}$ напівгрупа породжена всіма операторами $\mathcal{C}_{\mathbf{n}}$. Такі оператори, пов'язані з субсиметричним базисом і надалі використовується при означенні субсиметричних функцій.

Функція $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ називається субсиметричною або \mathfrak{S} -симетричною, якщо $f \circ A(x) = f(A(x)) = f(x)$ для кожного $A \in \mathfrak{S}$, а $f \in \overline{\mathfrak{S}}$ -симетричною, якщо $f \circ A(x) = f(A(x)) = f(x)$ для кожного $A \in \overline{\mathfrak{S}}$. Очевидно, $\mathfrak{S} \subset \overline{\mathfrak{S}}$, тому з [26] відомо, що наступні (стандартні) субсиметричні поліноми

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n}, \quad \alpha_j \geq [p]$$

утворюють лінійний базис у лінійному просторі субсиметричних поліномів на ℓ_p . Зокрема, будь-який m -однорідний субсиметричний поліном можна однозначно представити як скінченну лінійну комбінацію стандартних субсиметричних поліномів $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ таких, що $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$. Позначимо через \mathfrak{S} мінімальну напівгрупу, породжену операторами \mathcal{C}_j , а через $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(X)$ – алгебру всіх субсиметричних поліномів на X . У дослідженнях цього класу поліномів розглядаються побудова базису, опис алгебраїчних властивостей, зв'язок з алгебрами субсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу. Тому алгебра $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(X)$ є поліноміальним аналогом відповідних алгебр інваріантних аналітичних функцій.

Отже, субсиметричні функції на банахових просторах із субсиметричним базисом утворюють клас інваріантних функцій, який містить як субсиметричні поліноми, так і субсиметричні аналітичні функції. Основними інструментами їх дослідження є оператори \mathcal{C}_j та $\mathcal{C}_{\mathbf{n}}$, алгебра $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(X)$, а також твердження про перехід від субсиметричності до $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричності для

неперервних функцій. Саме ці відомі факти використовуються при розгляді структурних та алгебраїчних властивостей відповідних функцій.

1.2.5. Мультимножини, пов'язані з симетричними поліномами

При дослідженні симетричних функцій на банахових просторах виникає факторизація простору за дією групи симетрій. Нехай S — напівгрупа ізометричних операторів у банаховому просторі X . Тоді фактор-простір X/S , що складається з орбіт відносно дій S на X , можна розглядати як область визначення S -симетричних відображень. Набір X/S може мати нетривіальну алгебраїчну та топологічну структуру. Той випадок, коли $X = \ell_1$ і S — група перестановок базисних векторів, розглянуто в [9, 35] і в [14] для більш загального випадку. Зокрема, досліджувалися півкільцеві та кільцеві структури, пов'язані з X/S , топологізаціями X/S та застосування симетричних функцій на банахових просторах. Зазначимо, що X/S можна ототожнити з множиною мультимножин, оскільки будь-який елемент X/S є сім'єю неупорядкованих чисел із можливими повтореннями, тобто мультимножиною.

Клас еквівалентності, що містить x , позначимо як $[x]$. Фактор-множина $\mathcal{M}_X^+ = X/\sim$ складається з множин (можливо, нескінченних) мультимножин ненульових чисел $[x] = \{x_k : k \in \text{supp}(x), x \in X\}$ і класу $[0] = \{(0, 0, 0, \dots)\}$.

Зауважимо, що $(x_1, \dots, x_n, \dots) \sim (0, x_1, \dots, x_n, \dots)$, і оскільки ряд $\sum_n x_n e_n$ збігається в X , кожна ненульова координата x_k має скінченну кратність у $[x]$.

Визначимо асоціативну операцію напівгрупи на \mathcal{M}_X^+ у вигляді

$$[x] + [z] = [x] \cup [z].$$

Тоді $(\mathcal{M}_X^+, +)$ є комутативною напівгрупою. Якщо $[x] + [z] = [x] + [u]$, то $[z] = [u]$, тобто виконується закон скорочення. Якщо позначити $x \bullet z$ вектор

$(x_1, z_1, x_2, z_2, \dots)$, то

$$[x] + [z] = [x \bullet z].$$

Добре відомо, що будь-яка комутативна напівгрупа зі скороченням може бути вкладена (як напівгрупа) в комутативну групу за допомогою так званого розширення Гротендіка, яке є єдиним з точністю до ізоморфізму. Розширення Гротендіка множини $(\mathcal{M}_X^+, +)$ можна побудувати наступним чином.

Нехай

$$\mathcal{M}_X^+ \times \mathcal{M}_X^+ = \{([y], [x]) : [x], [y] \in \mathcal{M}_X^+\}$$

буде декартовим квадратом \mathcal{M}_X^+ . Розглянемо наступне відношення еквівалентності на $\mathcal{M}_X^+ \times \mathcal{M}_X^+$: $([y], [x]) \approx ([v], [u])$ тоді і тільки тоді, коли $[y] \setminus [x] = [v] \setminus [u]$ та $[x] \setminus [y] = [u] \setminus [v]$. Зокрема, маємо $([y] + [a], [x] + [a]) \approx ([y], [x])$ для кожного $[a] \in \mathcal{M}_X^+$. Надалі будемо використовувати позначення $[(y|x)] = [[y]||[x]] = [(\dots, y_2, y_1|x_1, x_2, \dots)]$ для класу, що містить $([y], [x])$, а \mathcal{M}_X — для фактор-множини $\mathcal{M}_X^+ \times \mathcal{M}_X^+ / \approx$.

Операція напівгрупи поширюється на \mathcal{M}_X так:

$$[[y]||[x]] + [[v]||[u]] = [[y] + [v]||[x] + [u]].$$

Оскільки $[(x|x)] = [(0|0)] = [0] \in \mathcal{M}_X$, то для оберненого елемента маємо $[(y|x)] = [(x|y)]$. Таким чином, $(\mathcal{M}_X, +)$ є комутативною групою. Використовуючи “симетричне перенесення” операції на X , $x \bullet z$, можемо записати:

$$[[y]||[x]] + [[v]||[u]] = [(y|x)] + [(v|u)] = [(y \bullet v|x \bullet u)].$$

Припускаємо, що \mathcal{M}_X^+ є підмножиною \mathcal{M}_X щодо вкладення $[x] \mapsto [(0|x)]$.

Елемент $(y'|x')$ класу $[(y|x)]$ називається незвідним, якщо для будь-яких індексів i та j , $x'_i \neq y'_j$. Відомо у [14, 35], що для кожного $[(y|x)] \in \mathcal{M}_X$ існує незвідне представлення, і воно єдине з точністю до перестановок (окремо для координат x і y).

Таким чином, мультимножини є факторною моделлю для симетричних функцій на банахових просторах із симетричним базисом. Перехід від елемента $x \in X$ до класу еквівалентності $[x]$ дозволяє ототожнити вектори, що відрізняються лише перестановкою координат, і тим самим перейти від функцій на X до функцій на фактор-множині X/\sim . Тому мультимножини є важливими при дослідженні симетричних поліномів, симетричних аналітичних функцій та пов'язаних з ними алгебраїчних і топологічних конструкцій.

1.2.6. Основи динамічних систем у метричних просторах

Нехай M — метричний простір, а T — неперервне відображення $T : M \rightarrow M$. Кажуть, що пара (T, M) є дискретною динамічною системою на M , враховуючи послідовність відображень $\{T^n\}, n \in \mathbb{N}$ [28].

Для точки $x \in M$ орбітою точки x відносно відображення T називається множина

$$\text{Orb}(x, T) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Саме властивості орбіт визначають основні динамічні характеристики системи.

Неперервне відображення $T: M \rightarrow M$ називається *гіперциклічним*, якщо існує такий елемент $a \in M$, що орбіта $\{T^n(a) : n \in \mathbb{N}\}$ є всюди щільною в M .

Означення 1.1. *Динамічна система (T, M) називається топологічно транзитивною, якщо для будь-яких відкритих непорожніх підмножин U, V множини M існує таке $k \geq 0$, таке що $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Точка $x \in M$ називається періодичною для відображення T , якщо існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що

$$T^n(x) = x.$$

Найменше таке число n називається періодом точки x .

Неперервне відображення $T: M \rightarrow M$ називається хаотичним (у сенсі Девені), якщо воно є топологічно транзитивним і множина його періодичних точок є щільною в M . Відомо [28, с. 13], що хаотичне відображення має чутливу залежність від початкових умов, тобто, існує константа $\delta > 0$ така, що для кожного $x \in X$ та $\varepsilon > 0$, існує деякий елемент $y \in X$ with $d(x, y) < \varepsilon$ такий, що для деякого номера $n \geq 0$, $d(T^n(x), T^n(y)) > \delta$, де d – метрика простору M .

Відомо, що якщо M є повним сепарабельним простором, то T є гіперциклічним тоді і тільки тоді, коли він є топологічно транзитивним [28, с. 10]. Тому в таких просторах хаотичність часто розглядають як поєднання гіперциклічності та щільності множини періодичних точок.

Відомо [47], що відображення зсуву назад

$$B\lambda: (x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto \lambda(x_2, \dots, x_n, \dots),$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, є топологічно транзитивним лінійним оператором, якщо $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, або якщо $X = c_0$. У роботах [39, 45, 52] розглянуто деякі узагальнення відображення зсуву назад для неперервних банахових просторів.

Оператор T називається змішуючим, якщо для кожної пари U, V непорожніх відкритих підмножин X існує число N таке, що

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{для всіх } n \geq N.$$

Очевидно, якщо оператор T є змішуючим, то він є топологічно транзитивним [28, с. 10]. Крім того, наведений нижче відомий результат (див., наприклад, [28, с. 71]) дає важливі умови, за яких оператор T є змішуючим на X .

Теорема 1.1. Критерій Китаї. *Якщо існують щільні підмножини $X_0, Y_0 \subset X$ і відображення $S: Y_0 \rightarrow Y_0$ такі, що для будь-яких $x \in X_0$ та $y \in Y_0$ виконуються умови:*

$$(i) \quad T^n(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

(ii) $S^n(y) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$,

(iii) $T \circ S(y) = y$,

то оператор T є змішуючим.

Таким чином, поняття орбіти, гіперциклічності, топологічної транзитивності та хаотичності є базовими для дослідження динаміки операторів, пов'язаних із симетричними та субсиметричними поліномами.

РОЗДІЛ 2

СУБСИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

У цьому розділі досліджуються алгебраїчні, аналітичні та спектральні аспекти субсиметричних поліномів і пов'язаних з ними функцій. Зокрема, розглянуто розширення субсиметричних поліномів на простори ℓ_p та $\ell_p(\mathfrak{A})$ для впорядкованої множини \mathfrak{A} , а також застосування отриманих результатів до задач про спектри операторів. Наведено приклади субсиметричних поліномів у функційних гільбертових просторах та досліджено їхні властивості. Особливу увагу приділено нулям субсиметричних поліномів, факторіальності відповідних алгебр і введенню прото-субсиметричних функцій. Крім того, у розділі розглянуто підрозділи, присвячені апроксимації субсиметричних функцій та похідним, пов'язаним із субсиметричними функціями, що доповнює загальну картину їхньої структури та властивостей. Результати, наведені в даному розділі, опубліковано в таких працях: [22,24].

2.1. Властивості субсиметричних поліномів

Як було зауважено, кожна $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетрична функція є субсиметричною. У наступному твердженні показано, що вірно і навпаки для неперервних функцій.

Твердження 2.1. *Нехай f – неперервна субсиметрична функція на банаховому просторі X з субсиметричним базисом. Тоді f є $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричною.*

Доведення. Нехай $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$, де $x \in X$, і $z = \mathcal{C}_{\mathbf{n}}(x)$. Для кожного $N \in \mathbb{N}$ позначимо

$$x^N = \sum_{k=1}^N x_k e_k \quad \text{та} \quad z^N = \sum_{k=1}^N x_k e_{n_k}.$$

Легко перевірити, що для кожного N існує $A_N \in \mathfrak{S}$ таке, що $z^N = A_N(x^N)$. Очевидно, що $x^N \rightarrow x$, а $z^N \rightarrow z$ при $N \rightarrow \infty$. Оскільки f неперервна, то

$f(x^N) \rightarrow f(x)$ та $f(z^N) \rightarrow f(z) = f(\mathcal{C}_n(x))$ при $N \rightarrow \infty$. З іншого боку, оскільки f є субсиметричною, то

$$f(x^N) = f(A_N(x^N)) = f(z^N),$$

отже, $f(x^N) \rightarrow f(\mathcal{C}_n(x))$ при $N \rightarrow \infty$. Таким чином, $f(x) = f(\mathcal{C}_n(x))$ для кожної підпослідовності \mathbf{n} . \square

Наслідок 2.1. *Нехай f – поточкова границя неперервних субсиметричних функцій f_n на X . Тоді f буде $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричною функцією.*

Доведення. Оскільки функції f_n неперервні, то за попереднім твердженням, вони $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричні. Тому для кожного оператора $\mathcal{C}_n \in \overline{\mathfrak{S}}$,

$$f \circ \mathcal{C}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \circ \mathcal{C}_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

Отже, f є $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричною функцією. \square

Нагадаємо, що функція f між топологічними просторами називається функцією *першого класу Бера*, якщо вона є поточною границею послідовності неперервних функцій. З наслідку 2.1 формально не впливає, що кожна субсиметрична функція першого класу Бера буде $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричною і ми не знаємо чи це так. Згідно з [46], кожен поліном (поліноміальний оператор) першого класу Бера з банахового простору X в банахів простір Y є неперервним. Тому кожен субсиметричний поліном першого класу Бера буде $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричним.

Покажемо, що розривні субсиметричні функції можуть не бути $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричними.

Приклад 2.1. *Виберемо в просторі c_0 стандартний базис Шаудера e_n і продовжимо його до деякого базису Гамеля (e_γ) , де γ пробігає деяку множину індексів Γ . Тоді, кожен вектор $x \in c_0$ можна подати у вигляді скінченної лінійної комбінації базисних векторів. Тобто існує номер $m \in \mathbb{N}$, який залежить від x і такий, що*

$$x = \sum_{i=1}^m x_{\gamma_i} e_{\gamma_i}.$$

Тому, для довільного натурального k ми можемо визначити поліном

$$Q_k(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma^k e_\gamma.$$

Поліном Q_k є інваріантним відносно дії операторів з групи \mathfrak{S} , тобто є субсиметричним. Проте, Q_k не може бути неперервним бо на c_0 не існує неперервного субсиметричного полінома, відмінного від константи [26]. Покажемо, що базис Гамеля (e_γ) можна вибрати так, що Q_k не буде $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричним для кожного натурального k . Справді, нехай $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ такий вектор в c_0 , що всі координати x_n не дорівнюють нулю. Наприклад, ми можемо покласти $x_n = 1/n$. Визначимо $e_{\gamma_1} = x$,

$$e_{\gamma_2} = (0, x_1, 0, x_3, 0, x_5, \dots),$$

$$e_{\gamma_3} = (0, 0, x_2, 0, x_4, 0, x_6, \dots).$$

Ці вектори є лінійно незалежними і, більше того, множина $\{e_n\} \cup e_{\gamma_1} \cup e_{\gamma_2} \cup e_{\gamma_3}$ є лінійно незалежною. Тому ми можемо вибрати базис Гамеля (e_γ) так, що він буде містити цю множину. З іншого боку, згідно з означенням Q_k ,

$$Q_k(e_{\gamma_1}) = 1 \quad \text{і} \quad Q_k(e_{\gamma_2+\gamma_3}) = 1 + 1 = 2.$$

Проте, якщо Q_k – $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричний, то

$$Q_k(e_{\gamma_2+\gamma_3}) = Q_k((0, x_1, \dots, x_n, \dots)) = Q_k(x) = Q_k(e_{\gamma_1}) = 1.$$

Суперечність.

Ми не знаємо, чи можна вибрати базис Гамеля (e_γ) так, що всі поліноми Q_k будуть $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричними.

Нагадаймо, що лінійний простір скінченних послідовностей c_{00} складається з векторів вигляду $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots) \in c_{00}$, для деякого натурального числа m , що залежить від вектора x . Тобто, вектори $e_n = (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots)$ утворюють базис Гамеля в c_{00} . Визначимо

$$\check{x} = (x_m, x_{m-1}, \dots, x_1, 0, 0, \dots).$$

Також, для $x = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$, $y = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots) \in c_{00}$ введемо операцію \triangleleft , поклавши

$$x \triangleleft y = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, 0, \dots).$$

Формально означення \check{x} та $x \triangleleft y$ залежать від числа m , яке обмежує кількість ненульових координат вектора x . Проте легко перевірити, що для кожного $P \in P_S(c_{00})$

$$P(\check{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, 0, 0, \dots), \quad (2.1)$$

та

$$P(x \triangleleft y) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots). \quad (2.2)$$

Праві частини у (2.1) та (2.2) не залежать від вибору m , тому ці формули можна використати для продовження відповідних означень у більш загальному випадку.

Наведемо корисні тотожності. Безпосередні обчислення (див. [17, 18]) показують, що для $x, y \in c_{00}$

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x \triangleleft y) = \sum_{j=0}^{m+1} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}(x) P_{\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m}(y), \quad (2.3)$$

де за домовленістю $P_\emptyset \equiv 1$.

Крім того, очевидно, що

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(\check{x}) = P_{\alpha_m, \dots, \alpha_1}(x), \quad x \in c_{00}. \quad (2.4)$$

Надалі формули (2.1)–(2.4) використовуватимуться для побудови гомоморфізмів алгебри $P_S(\ell_p)$ та продовження субсиметричних поліномів на простори $\ell_p(\mathfrak{A})$.

Розглянемо простори ℓ_p для $1 \leq p < \infty$. Лінійний простір c_{00} є щільним у банаховому просторі ℓ_p для кожного $1 \leq p < \infty$. Отже, якщо субсиметричний поліном P на c_{00} є неперервним у топології ℓ_p , то ми можемо продовжити його до неперервного субсиметричного полінома на ℓ_p .

Як відомо, стандартні субсиметричні поліноми $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ визначені і неперервні на ℓ_p , тоді і тільки тоді, коли кожне $\alpha_j \geq [p]$ [26]. Зокрема, кожен субсиметричний поліном на c_0 можна продовжити до субсиметричного полінома на ℓ_1 так, що для кожного $x \in \ell_1$

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n}.$$

Також, відомо що c_0 не містить жодного субсиметричного полінома, відмінного від константи [26]. З іншого боку, існують субсиметричні неперервні функції на c_0 . Наприклад, $f(x) = \|x\|$ є симетричною (також субсиметричною) на c_0 . Наступна функція є субсиметричною, але не є симетричною на c_0

$$g(x) = \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \| (x_{i+1}, x_{i+2}, \dots) \|^2 = \max_{i < j} |x_i| |x_j|^2.$$

Позначимо через $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ алгебру всіх неперервних субсиметричних поліномів на ℓ_p .

Для кожного $x \in \ell_p$ відображення

$$\delta_x : P \mapsto P(x)$$

є так званим комплексним гомоморфізмом значення в точці для $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$. Дізнаємо відношення еквівалентності на ℓ_p таким чином, що $x \simeq y$, якщо існують оператори τ_1 і τ_2 в \mathfrak{S} , такі що $\tau_1(x) = \tau_2(y)$. Аналогічно, $x \sim y$, якщо існують оператори σ_1 і σ_2 в напівгрупі всіх підстановок базисних векторів S , такі що $\sigma_1(x) = \sigma_2(y)$. Фактор множина $\mathcal{M}_p^S = \ell_p / \sim$ може бути асоційована з множиною нескінченних мультимножин $[x]$, що складаються з ненульових комплексних чисел x_i , таких що $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Спочатку наведемо відому ознаку еквівалентності через значення симетричних поліномів. Далі встановимо критерій еквівалентності елементів ℓ_p через значення субсиметричних поліномів. Наступне твердження було доведено в [1].

Твердження 2.2. *Нехай $x, y \in \ell_p$. Тоді $x \sim y$ в ℓ_p , тоді і тільки тоді, коли існує натуральне число $t \geq [p]$ таке, що $P_n(x) = P_n(y)$ для будь-якого $n \geq t$. У цьому випадку $P(x) = P(y)$ для кожного симетричного полінома P .*

Теорема 2.1. *Нехай $x, y \in \ell_p$. Тоді $x \simeq y$, якщо існує натуральне число $m \geq [p]$ таке, що $P_n(x) = P_n(y)$ і $P_{n,2n}(x) = P_{n,2n}(y)$ для всіх $n \geq m$. У цьому випадку $P(x) = P(y)$ для кожного субсиметричного полінома P .*

Доведення. Якщо $x \simeq y$, тоді очевидно, що $P(x) = P(y)$ для всіх $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$. З іншого боку, з твердження 2.2 випливає, що $x \sim y$, вилучивши нульові координати, можемо вважати, що x_i є елементами мультимножини $[x]$, а y_j – елементами $[y]$, де $i, j \in \mathbb{N}$. Розглянемо такі мультимножини

$$M_{1,2}(x) = \{x_i x_j^2 : i < j\}, \quad M_{1,2}(y) = \{y_i y_j^2 : i < j\}.$$

Стверджуємо, що якщо $(x_1, x_2, \dots) \neq (y_1, y_2, \dots)$ (як вектори), тоді $M_{1,2}(x) \neq M_{1,2}(y)$ (як мультимножини). Припустимо, що існують $x_r \neq x_s$ таке, що $r < s$ і бієкція $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ така, що $(y_1, y_2, \dots) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots)$ і $\sigma(r) > \sigma(s)$. Тоді симетрична різниця $M_{1,2}(x) \Delta M_{1,2}(y)$ є ненульовою, бо містить елементи $x_r x_s^2$ і $x_s x_r^2$. Застосовуючи твердження 2.2 до $u = M_{1,2}(x)$ та $v = M_{1,2}(y)$, отримаємо, що для кожного $m \geq [p]$ існує $n \geq m$ таке, що $P_n(u) \neq P_n(v)$. Але

$$P_n(u) = \sum_{i < j} (x_i x_j^2)^n = \sum_{i < j} x_i^n x_j^{2n} = P_{n,2n}(x),$$

тому $P_{n,2n}(x) \neq P_{n,2n}(y)$. Суперечність. Отже, $M_{1,2}(x) = M_{1,2}(y)$, тобто $x \simeq y$. Зокрема, $P(x) = P(y)$ для кожного субсиметричного полінома P . □

З теореми 2.1 випливає, що $x \simeq y$, тоді і тільки, тоді коли $\delta_x = \delta_y$ на просторі $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$.

Тепер узагальнимо побудовані на c_{00} операції на гомоморфізми алгебри $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$.

Очевидно, якщо $x \in \ell_p$ має нескінченно багато ненульових координат, то елемент \tilde{x} не існує в ℓ_p . Але ми можемо визначити комплексний гомоморфізм $\delta_{\tilde{x}}$ як

$$\delta_{\tilde{x}}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, 0, 0, \dots), \quad P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p).$$

Аналогічно, якщо x і y належать ℓ_p , то $x \triangleleft y$ може бути не визначеним, як вектор в ℓ_p , але ми можемо визначити

$$\delta_{x \triangleleft y}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots), \quad P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$$

Більше того, ми можемо визначити

$$\delta_{\tilde{x} \triangleleft y}(P) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, y_1, y_2, \dots), \quad P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p).$$

Твердження 2.3. *Комплексні гомоморфізми $\delta_{\tilde{x}}$, $\delta_{x \triangleleft y}$ і $\delta_{\tilde{x} \triangleleft y}$ коректно визначені на $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ для всіх $x, y \in \ell_p$. Більше того, для кожного стандартного полінома $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$, маємо*

$$\delta_{\tilde{x}}(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = P_{\alpha_n, \dots, \alpha_1}(x),$$

та

$$\delta_{x \triangleleft y} = \sum_{j=0}^{n+1} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}(x) P_{\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n}(y).$$

Доведення. Нехай $x^{(k)} = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots)$. Для кожного фіксованого k і стандартного полінома $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, отримаємо

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left((x^{(k)})^{\vee} \right) = P_{\alpha_n, \dots, \alpha_1}(x^{(k)}).$$

Оскільки $x^{(k)} \rightarrow x$ при $k \rightarrow \infty$, з неперервності $P_{\alpha_n, \dots, \alpha_1}$ випливає

$$\delta_{\tilde{x}}(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\alpha_n, \dots, \alpha_1}(x^{(k)}) = P_{\alpha_n, \dots, \alpha_1}(x).$$

Оскільки кожен поліном в $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ є скінченною лінійною комбінацією стандартних поліномів, то $\delta_{\tilde{x}}$ цілком визначений на $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$. Аналогічно, використовуючи рівність

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x \triangleleft y) = \sum_{j=0}^{m+1} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}(x) P_{\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m}(y), \quad x, y \in c_{00}$$

і щільність c_{00} в ℓ_p , ми можемо довести решту твердження, що стосується $\delta_{x \triangleleft y}$ і $\delta_{\tilde{x} \triangleleft y}$. □

Для кожного $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ визначимо $\check{P}(x) = \delta_{\check{x}}(P)$. Очевидно, якщо $x \in c_{00}$, то $\delta_{\check{x}}(P) = P(\check{x})$.

Наслідок 2.2. Відображення $P \mapsto \check{P}$ є інволюцією алгебри $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ і $\|P\| = \|\check{P}\|$.

Доведення. Маємо

$$\check{P}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) = \delta_{\check{x}}(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = P_{\alpha_n, \dots, \alpha_1}(x).$$

Отже, гомоморфізм $P \mapsto \check{P}$ цілком визначений для кожного $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$. Також, $(\check{P})^\vee = P$, тобто P є інволюцією. Оскільки c_{00} є щільним у ℓ_p і $\|x\| = \|\check{x}\|$ у ℓ_p для кожного $x \in c_{00} \subset \ell_p$, отримаємо

$$\begin{aligned} \|\check{P}\| &= \{\sup |\check{P}(x)| : x \in c_{00} \subset \ell_p, \|x\| \leq 1\} \\ &= \{\sup |P(\check{x})| : x \in c_{00} \subset \ell_p, \|x\| \leq 1\} = \|P\|. \end{aligned}$$

□

2.2. Продовження субсиметричних функцій

У цьому підрозділі ми розглянемо продовження субсиметричних поліномів та інших субсиметричних функцій з просторів ℓ_p на ширші простори $\ell_p(\mathfrak{A})$.

Пригадаємо, що множина \mathfrak{A} є цілком впорядкованою, якщо вона є лінійно впорядкованою і кожна непорожня підмножина \mathfrak{A} має мінімальний елемент. У цьому підрозділі будемо вважати, що \mathfrak{A} — це нескінченна цілком впорядкована множина відносно порядку \preceq . Банахів простір $\ell_p(\mathfrak{A})$ є простором функцій

$$x : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x = (x_\gamma)_{\gamma \in \mathfrak{A}}$$

таких, що

$$\|x\| := \left(\sum_{\gamma \in \mathfrak{A}} |x_\gamma|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Очевидно, що для будь-якого $x \in \ell_p(\mathfrak{A})$ лише зліченна кількість координат x_γ є ненульовими.

Для довільного індекса $\beta \in \mathfrak{A}$ ми позначимо \mathbf{e}_β такий вектор в $\ell_p(\mathfrak{A})$:

$$\mathbf{e}_\beta(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma = \beta, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Використовуючи це позначення, ми можемо зобразити довільний елемент $u \in \ell_p(\mathfrak{A})$ у вигляді

$$u = \sum_{\gamma \in \mathfrak{A}} u(\gamma) \mathbf{e}_\gamma.$$

Отже, вектори \mathbf{e}_γ , $\gamma \in \mathfrak{A}$ базис Шаудера (не обов'язково злічений) в просторі $\ell_p(\mathfrak{A})$, і числа $u_\gamma = u(\gamma)$ є координатами вектора u в цьому базисі. Також, ми використовуватимемо позначення $c_{00}(\mathfrak{A})$ для лінійного простору скінченних послідовностей, заіндексованих множиною \mathfrak{A} :

$$c_{00}(\mathfrak{A}) = \left\{ u = \sum_{j=1}^n u_{\gamma_j} \mathbf{e}_{\gamma_j} : \gamma_1 \prec \cdots \prec \gamma_n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Очевидно, що $c_{00}(\mathfrak{A})$ є щільним підпростором в $\ell_p(\mathfrak{A})$.

Нехай

$$\iota : \mathbb{N} \rightarrow \mathfrak{A}$$

– деяке ін'єктивне відображення множини натуральних чисел з природним порядком \leq в \mathfrak{A} , таке що, якщо $n_1 \leq n_2$, то $\iota(n_1) \preceq \iota(n_2)$. Таким чином, ℓ_p можна розглядати як підпростір $\ell_p(\mathfrak{A})$, що складається з векторів

$$(x_{\iota(1)}, x_{\iota(2)}, \dots, x_{\iota(n)}, \dots).$$

Нехай $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ – деякий стандартний поліном на ℓ_p . Важаючи, що $\ell_p \subset \ell_p(\mathfrak{A})$, ми можемо записати

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_{\iota(1)}, x_{\iota(2)}, \dots) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{\iota(i_1)}^{\alpha_1} \cdots x_{\iota(i_n)}^{\alpha_n}.$$

Позначимо через $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\mathfrak{A}}$ наступний поліном на $\ell_p(\mathfrak{A})$,

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\mathfrak{A}}(x) = \sum_{\gamma_1 < \dots < \gamma_n} x_{\gamma_1}^{\alpha_1} \cdots x_{\gamma_n}^{\alpha_n}. \quad (2.5)$$

Очевидно, що $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\mathfrak{A}}$ є продовженням $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$, і це продовження не залежить від відображення ι . Оскільки кожен субсиметричний поліном є лінійною комбінацією стандартних поліномів, то отримаємо наступне твердження.

Твердження 2.4. *Кожен субсиметричний поліном P на ℓ_p може бути продовжений до полінома $P^{\mathfrak{A}}$ на $\ell_p(\mathfrak{A})$. Оператор продовження $\mathcal{J} : P \mapsto P^{\mathfrak{A}}$ є лінійним, а $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\mathfrak{A}}$ визначений рівністю (2.5).*

Позначимо через $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_p(\mathfrak{A}))$ множину всіх значень $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_p)$ відносно відображення \mathcal{J} . Ми бачимо, що $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_p(\mathfrak{A}))$ є алгеброю, а \mathcal{J} є ізоморфізмом алгебр. Зокрема, для кожної точки $u \in \ell_p(\mathfrak{A})$ функціонал $P \mapsto P^{\mathfrak{A}}(u)$ є комплексним гомоморфізмом.

Твердження 2.5. *Для кожного $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_p)$, $\|P\| = \|P^{\mathfrak{A}}\|$.*

Доведення. Оскільки ℓ_p ізометрично вбудовується в $\ell_p(\mathfrak{A})$, $\|P\| \leq \|P^{\mathfrak{A}}\|$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує вектор $u = (u_{\gamma_1}, \dots, u_{\gamma_n}, \dots) \in \ell_p(\mathfrak{A})$, $\|u\| = 1$ такий, що $|P^{\mathfrak{A}}(u)| \geq \|P^{\mathfrak{A}}\| - \varepsilon$. Нехай $x \in \ell_p$ таке, що $x_n = u_{\gamma_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\|x\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |u_{\gamma_n}|^p = \|u\|^p = 1.$$

Також, за означенням оператора продовження \mathcal{J} , $P(x) = P^{\mathfrak{A}}(u)$ і тому $|P(x)| \geq \|P^{\mathfrak{A}}\| - \varepsilon$. Оскільки такий вектор існує для кожного $\varepsilon > 0$, $\|P\| \geq \|P^{\mathfrak{A}}\|$. Отже, $\|P\| = \|P^{\mathfrak{A}}\|$. \square

Теорема 2.2. *Нехай x та y – вектори в ℓ_p , $1 \leq p < \infty$ такі, що x має нескінченний носій і $y \neq 0$. Тоді не існує такого вектора $z \in \ell_p$, що $\delta_z = \delta_{x \triangleleft y}$.*

Доведення. Якщо такий вектор $z \in \ell_p$ існує, то $P(z) = P(x \triangleleft y)$ для кожного субсиметричного полінома P . Зокрема, для кожного степеневого полінома P_k ,

$$P_k(z) = P_k(x \triangleleft y) = P_k(x \bullet y) = P_k(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots).$$

Таким чином (див. [16]) вектор z дорівнює вектору $x \bullet y$ з точністю до перестановки ненульових координат. Тобто, ненульові координати вектора z і вектора $x \bullet y$ утворюють тотожні мультимножини. Без втрати загальності ми можемо вважати, що $y_1 \neq 0$. Існує не більше ніж скінченна кількість N координат x_i вектора x для яких $x_{i_1} = \dots = x_{i_N} = y_1$. Також, існує скінченна кількість $N' \geq 1$ координат y_j вектора y для яких $y_{j_1} = \dots = y_{j_{N'}}$. Отже, кількість координат z_l вектора z які дорівнюють y_1 є $N + N' > N$ ми позначимо символом K максимальне число для якого $z_K = y_1$. Нехай a буде числом, яке дорівнює деякій координаті вектора x задовольняє таку умову: мінімальне число k для якого $x_k = a$ або $x_k = -a$ більшим ніж $\max N, K$. Такий елемент існує, оскільки x нескінченно багато ненульових координат і кожна така координата може повторюватись лише скінченну кількість разів. Нехай m_a – кількість повторень числа a в мультимножині

координат вектора z . Розглянемо такі мультимножини:

$$M_{1,2}(x \triangleleft y) = \{x_i y_j : i < j\} \cup \{x_i x_j : i < j\} \cup \{y_i y_j : i < j\}, \quad M_{1,2}(z) = \{z_i z_j : i < j\}.$$

Ми стверджуємо, що $M_{1,2}(x \triangleleft y) \neq M_{1,2}(z)$. Справді, за побудовою, кількість повторень числа $y_1 a^2$ в $M_{1,2}(x \triangleleft y)$ дорівнює $m_a N$, тоді як кількість повторень числа $y_1 a^2$ в $M_{1,2}(z)$ дорівнює $b_a(N + N') > m_a N$. Тому існує число $m \in \mathbb{N}$ таке що

$$P_m(M_{1,2}(x \triangleleft y)) \neq P_m(M_{1,2}(z)).$$

Але

$$P_m(M_{1,2}(x \triangleleft y)) = P_{m,2m}(x \triangleleft y)$$

і

$$P_m(M_{1,2}(z)) = P_{m,2m}(z).$$

Суперечність доводить теорему. □

Приклад 2.2. Як було доведено вище, не існує точки z в ℓ_p такої, що $P(z) = \delta_{x \triangleleft y}(P)$, якщо $y \neq 0$ і x має нескінченно багато ненульових координат. Однак, така точка існує в $\ell_p(\mathfrak{A})$ для деякої множини індексів \mathfrak{A} . Дійсно, нехай $\mathfrak{A} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, де \mathbb{N}_1 і \mathbb{N}_2 – копії натуральних чисел з природним порядком, якщо $i \in \mathbb{N}_1$ і $j \in \mathbb{N}_2$, то $i < j$. Для заданих x і y в ℓ_p ми визначаємо

$$u = (x_1, \dots, x_i, \dots) + (y_1, \dots, y_j, \dots) \in \ell_p(\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2), \quad i \in \mathbb{N}_1, j \in \mathbb{N}_2.$$

Тоді $\delta_{x \triangleleft y}(P) = P(u)$. Зауважимо, що $\|u\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$.

Нехай f – субсиметрична функція на ℓ_p і f_0 – її продовження на щільний підпростір $c_{00} \subset \ell_p$. Тоді ми можемо продовжити f_0 до деякої функції $f_0^{\mathfrak{A}}$ на $c_{00}(\mathfrak{A})$ поклавши

$$f_0^{\mathfrak{A}}\left(\sum_{\gamma_i \in \text{supp}(u)} u_{\gamma_i} \mathbf{e}_{\gamma_i}\right) = f_0\left(\sum_{\gamma_i \in \text{supp}(u)} u_{\gamma_i} e_i\right).$$

Очевидно, що $f_0^{\mathfrak{A}}$ є продовженням функції f_0 і це продовження не залежить від вкладення J простору $c_0 \cap c_{00}(\mathfrak{A})$ в $c_{00}(\mathfrak{A})$.

Означення 2.1. Субсиметрична функція f на ℓ_p називається \mathfrak{A} -продовжувальною, якщо для кожного $u \in X(\mathfrak{A})$ існує єдине число a таке, що для кожної послідовності векторів $v_n \in c_{00}(\mathfrak{A})$, що збігається до u виконується рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_0^{\mathfrak{A}}(v_n) = a.$$

В цьому випадку ми позначаємо $f^{\mathfrak{A}}(u) = a$. Якщо функція f є \mathfrak{A} -продовжувальною для кожної цілком впорядкованої множини \mathfrak{A} , то ми будемо називати її продовжувальною.

З твердження 2.4 ми маємо наступний наслідок.

Наслідок 2.3. Кожна субсиметрична функція з $H_{b\mathfrak{S}}(\ell_p)$ є продовжувальною.

Доведення. Нехай $f \in H_{b\mathfrak{S}}(\ell_p)$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad f_n \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p).$$

З твердження 2.4 випливає, що кожен n -однорідний поліном f_n є продовжувальним. Враховуючи, що $\|f_n^{\mathfrak{A}}\| = \|f_n\|$ і що радіус збіжності ряду Тейлора функції f в нулі дорівнює нескінченності, маємо

$$r_0(f) = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|^{1/n} \right)^{-1} = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n^{\mathfrak{A}}\|^{1/n} \right)^{-1} = r_0(f^{\mathfrak{A}}) = \infty.$$

Таким чином, $f^{\mathfrak{A}}$ є цілою аналітичною функцією обмеженого типу на $\ell_p(\mathfrak{A})$. Очевидно, $f^{\mathfrak{A}}$ задовольняє означення 2.1. \square

Наступний приклад показує, що в довільному банаховому просторі існує широкий клас неперервних субсиметричних продовжувальних функцій.

Приклад 2.3. Нехай ξ неперервна і обмежена функція на полі \mathbb{K} дійсних або комплексних чисел і $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ – деякий стандартний субсиметричний поліном на просторі ℓ_1 над полем \mathbb{K} . Визначимо наступну функцію

g на банаховому просторі X над полем \mathbb{K} з субсиметричним базисом (e_n) :

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi(P(|x_1|, \dots, |x_n|, 0, \dots)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi \circ P\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right).$$

Оскільки для кожного фіксованого n , вектор $(|x_1|, \dots, |x_n|, 0, \dots)$ належить ℓ_1 , значення $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ коректно визначено. Числова послідовність $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$ є додатною і зростаючою. Отже, або ця послідовність має границю в носії функції ξ , або тільки скінченна кількість елементів цієї послідовності лежить у носії. В обидвох випадках значення $g(x)$ є визначеним. Оскільки поліном $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ є субсиметричним і продовжувальним, функція g є субсиметричною і продовжувальною.

2.3. Приклади субсиметричних поліномів у функційних гільбертових просторах

Якщо \mathcal{H} – абстрактний гільбертів простір зі скалярним добутком $\langle \cdot | \cdot \rangle$ і ортонормованим базисом (e_n) , то \mathcal{H} є ізоморфним до ℓ_2 відносно ізоморфізму J , який визначається на базисних векторах як

$$J: e_n \mapsto (\underbrace{0, \dots, 0}_n, 1, 0, \dots).$$

Тому, для кожного субсиметричного полінома P на ℓ_2 ми можемо визначити субсиметричний поліном на \mathcal{H} як $P(h) := P(J(h))$. Проте, додаткові структури простору \mathcal{H} можуть забезпечити додаткові властивості субсиметричних поліномів.

Приклад 2.4. Нехай \mathcal{H} – це класичний простір Харді $H^2(\mathbb{D})$ аналітичних функцій

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$$

у відкритому диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ для яких є визначеною норма

$$\|h\|^2 = \langle h | h \rangle = \int_{|z|=1} h(z) \overline{h(z)} dz = \sum_{k=0}^{\infty} |h_k|^2 < \infty.$$

При цьому, поліноми $e_k(z) = z^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ утворюють ортонормований базис $H^2(\mathbb{D})$ і кожен стандартний субсиметричний поліном на $H^2(\mathbb{D})$ має вигляд:

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(h) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} h_{i_1}^{\alpha_1} \cdots h_{i_n}^{\alpha_n}, \quad i_m \geq 2,$$

де коефіцієнти h_k можна обчислити як

$$h_k = \int_{|z|=1} h(z) \overline{z^k} dz.$$

Оператори

$$\mathcal{C}_j: (h_0, \dots, h_n, \dots) \mapsto (h_0, \dots, h_{j-1}, 0, h_j, h_{j+1}, \dots), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

можна зобразити як оператори множення на незалежну змінну z :

$$\mathcal{C}_j(h) = \mathcal{C}_j\left(\sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{j-1} h_k z^k + z \sum_{k=j}^{\infty} h_k z^k.$$

Зокрема, $\mathcal{C}_0(h) = zh$ є класичним оператором зсуву на просторі $H^2(\mathbb{D})$ (див. [43]).

В загальному випадку, оператори \mathcal{C}_j природно діють у просторі $H_b(H^2(\mathbb{D}))$ аналітичних функцій обмеженого типу на $H^2(\mathbb{D})$ як

$$\widehat{\mathcal{C}}_j(f)(h) = f(\mathcal{C}_j(h)).$$

Оскільки $\widehat{\mathcal{C}}_j$ є оператором композиції з неперервним лінійним оператором \mathcal{C}_j , він є неперервним алгебраїчним гомоморфізмом з $H_b(H^2(\mathbb{D}))$ в себе (див. [2]).

Твердження 2.6. *Простір $H_{b\mathfrak{S}}(H^2(\mathbb{D}))$ субсиметричних аналітичних функцій обмеженого типу на $H^2(\mathbb{D})$ є максимальним підпростором в $H_b(H^2(\mathbb{D}))$, який складається з інваріантних векторів всіх операторів $\widehat{\mathcal{C}}_j$.*

Доведення. Згідно означення субсиметричної функції, $f \in H_b(H^2(\mathbb{D}))$ є субсиметричною тоді і тільки тоді коли вона є інваріантною відносно всіх операторів $\widehat{\mathcal{C}}_j$. □

Зауважимо, що не кожен $\widehat{\mathcal{C}}_0$ -інваріантний поліном є субсиметричним.

Приклад 2.5. *Нехай*

$$P(h) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k h_{k+1}.$$

Тоді P є $\widehat{\mathcal{C}}_0$ -інваріантним але не субсиметричним. Справді,

$$\widehat{\mathcal{C}}_0(P)(h) = P(\mathcal{C}_0(h)) = P(0, h_0, h_1, h_2, \dots) = 0h_0 + h_0h_1 + h_1h_2 + \dots = P(h),$$

тоді як

$$\widehat{\mathcal{C}}_1(P)(h) = P(\mathcal{C}_1(h)) = P(h_0, 0, h_1, h_2, \dots) = 0h_0 + 0h_1 + h_1h_2 + \dots \neq P(h).$$

Розглянемо інший приклад гільбертового простору \mathcal{H} .

Приклад 2.6. Нехай \mathcal{H} – дійсний гільбертів простір з ортогональним базисом, що складається з поліномів Чебишева першого роду T_n , $n \in \mathbb{N}$, і скалярним добутком

$$\langle u|v \rangle = \int_{-1}^1 u(t)v(t) \frac{dt}{1-t^2}.$$

Нагадаймо, що поліноми Чебишева першого роду визначаються рівностями

$$T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta, \quad \vartheta \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Гільбертів простір \mathcal{H} можна розглядати як зважений простір $L_2[-1, 1]$, а саме, $\mathcal{H} = L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2})$. Послідовність поліномів

$$\frac{1}{\pi}, \quad \frac{2}{\pi}T_1, \quad \frac{2}{\pi}T_2, \quad \dots$$

утворює ортонормований базис в $L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2})$. Більше інформації про поліноми Чебишева можна знайти в [41]. Отже, стандартні субсиметричні поліноми на $L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2})$ мають вигляд

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(g) = \sum_{i_1 < \dots < i_n} h_{i_1}^{\alpha_1} \cdots g_{i_n}^{\alpha_n}, \quad i_m \geq 2,$$

де $g \in L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2})$,

$$g_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(t) \frac{dt}{1-t^2}, \quad i \quad g_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_n(t)g(t) \frac{dt}{1-t^2}.$$

З формули (2.6) випливає, що композицію $T_k \circ T_m$ поліномів T_k і T_m можна записати $T_k \circ T_m(t) = T_k(T_m(t)) = T_{km}(t)$, $k, m \in \mathbb{N}$. Таким чином, кожен поліном T_k лінійний неперервний оператор $g \mapsto T_k \circ g$ on $L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2})$

такий, що

$$T_k \circ g(t) = \frac{g_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g_n T_{kn}.$$

Іншими словами, оператор композиції з T_k відображає (g_0, g_1, g_2, \dots) в

$$(g_0, \underbrace{0, \dots, 0}_k, g_1, \underbrace{0, \dots, 0}_k, g_2, \underbrace{0, \dots, 0}_k, g_3, \dots).$$

Очевидно, що якщо f є субсиметричною функцією, то $f(T_k \circ g) = f(g)$. Отже, позначивши $\widehat{T}_k(f) = f(T_k \circ g)$, ми бачимо, що \widehat{T}_k є неперервним оператором на $H_b(L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2}))$ і кожна функція з $H_b(L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2}))$ є інваріантною відносно кожного оператора \widehat{T}_k . Зауважимо, що простір T_k -інваріантних функцій обмеженого типу є ширшим ніж $H_b(L_2([-1, 1], \frac{1}{1-t^2}))$. Справді, поліном $Q(g) = g_0^2$ є інваріантним відносно \widehat{T}_k для кожного $k \in \mathbb{N}$ але не є субсиметричним.

2.4. Застосування субсиметричних поліномів у оберненій спектральній задачі теорії нормальних операторів

У цьому підрозділі ми покажемо як можна застосувати теорему 3.5 до задачі відновлення нормального оператора на гільбертовому просторі за інформацією про його спектр.

Нехай E — сепарабельний гільбертовий простір, а $A : E \rightarrow E$ — нормальний оператор з точковим спектром, такий що власні значення x_i оператора A ненульові і $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$. Іншими словами, A є p -ядерним оператором. Нехай (e_i) — ортонормований базис власних векторів оператора A . Такі оператори (з дійсними власними значеннями) природно з'являються в квантовій фізиці, де $A = e^{-\beta \mathcal{H}}$, де \mathcal{H} — гамільтоніан квантової системи, а $\beta > 0$ — фізичний параметр (див. деталі, наприклад, в [34]). Відомо, що оператор A не може бути визначений тільки своїм спектром. Встановлення додаткових умов або деяких додаткових спектральних даних, що дозволяють визначити A , є важливою оберненою задачею спектральної теорії операторів.

Всі власні значення x_i оператора A , рахуючи їх кратності, утворюють мультимножину $[x] \in \mathcal{M}_p^s$, де $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_p$. Для кожного $k \geq |p|$, маємо

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k = \text{tr } A^k,$$

де tr — це слід оператора. З твердження 2.2 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2.4. *Нехай A і B — нормальні p -ядерні оператори з точковими спектрами і однаковими власними векторами, так що власні значення x_i оператора A і власні значення y_i оператора B є ненульовими. Тоді $[x] = [y]$ як мультимножини, тоді і тільки тоді, коли існує натуральне число $t \geq |p|$, таке що $\text{tr } A^t = \text{tr } B^t$ для всіх $n \geq t$.*

Оскільки ми припускаємо, що всі власні значення x_i оператора A ненульові, впорядкована мультимножина $[[x]]$ повністю визначає оператор A .

Нагадаємо, що гільбертовим тензорним добутком $E \otimes_h E$ гільбертового простору E на себе називають поповнення алгебраїчного тензорного добутку $E \otimes E$ відносно норми породженої скалярним доутком на $E \otimes E$ для якого вектори $e_i \otimes e_j$ будуть ортонормованим базисом. Тобто, кожен вектор $u \in E \otimes_h E$ можна подати у вигляді

$$u = \sum_{i,j=1}^{\infty} u_{ij} e_i \otimes e_j$$

і норма u в $E \otimes_h E$ визначається як

$$\|u\| = \sum_{i,j=1}^{\infty} |u_{ij}|^2.$$

Нехай $E \wedge E$ — це антисиметричний гільбертовий тензорний добуток простору E на себе. Тобто, $E \wedge E$ — це замкнутий підпростір гільбертового тензорного добутку $E \otimes_h E$, породженого ортогональними векторами $e_i \wedge e_j = \frac{e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i}{2}$. Іншими словами, вектори $e_i \wedge e_j$, де $i < j$, утворюють ортогональний базис в $E \wedge E$. Для заданих операторів A і B на E позначимо $A \wedge B$ обмеження $A \otimes B$ на $E \otimes E \wedge E$. Тобто,

$$(A \wedge B)(e_i \wedge e_j) = A(e_i) \wedge B(e_j).$$

Для будь-яких натуральних чисел k і m , маємо

$$(A^k \wedge A^m)(e_i \wedge e_j) = x_i^k x_j^m,$$

і якщо A є p -ядерним, і $k \geq p$ та $m \geq p$, то

$$\text{tr}(A^k \wedge A^m) = \sum_{i < j} x_i^k x_j^m = P_{k,m}(x).$$

Таким чином, застосовуючи теорему 2.1, отримаємо наступний результат.

Теорема 2.3. *Нехай A і B — нормальні p -ядерні оператори з точковими спектрами і однаковими власними векторами, так що власні значення x_i оператора A і власні значення y_i оператора B є ненульовими. Тоді $A = B$, тоді і тільки тоді, коли існує натуральне число $m \geq |p|$, таке що $\text{tr} A^m = \text{tr} B^m$ і $\text{tr}[(A \wedge A^2)^n] = \text{tr}[(B \wedge B^2)^n]$ для всіх $n \geq m$.*

Доведення. Як ми згадували вище, достатньо показати, що $[[x]] = [[y]]$. Ця рівність випливає з теореми 2.1, тому що

$$\operatorname{tr}[(A \wedge A^2)^n] = \operatorname{tr}(A^n \wedge A^{2n}) = P_{n,2n}(x),$$

i

$$\operatorname{tr}[(B \wedge B^2)^n] = \operatorname{tr}(B^n \wedge B^{2n}) = P_{n,2n}(y).$$

□

2.5. Нулі субсиметричних поліномів

Нехай P – n -однорідний поліном на комплексному нескінченновимірному лінійному просторі. Згідно з відомим результатом з [46], для кожного $x_0 \in \ker P$ існує нескінченновимірний підпростір у $\ker P$, що містить x_0 . Основну ідею доведення результату з [46] можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Твердження 2.7. *Нехай X – нескінченновимірний комплексний лінійний простір, а P – n -однорідний \mathbb{C} -значний поліном. Для кожного $x_0 \in \ker P$ існує нескінченна лінійно незалежна послідовність $(x^{(k)}) \subset X$ така, що для кожного $m \in \mathbb{N}$,*

$$P(t_1x^{(1)} + t_2x^{(2)} + \dots + t_mx^{(m)}) = t_1^n P(x^{(1)}) + t_2^n P(x^{(2)}) + \dots + t_m^n P(x^{(m)}), \quad (2.7)$$

та x_0 належить лінійному підпростору, породженому $(x^{(k)})$.

Діагональне представлення (2.7) підказує, що обмеження полінома P на деякий підпростір є симетричним відносно відповідного базису, тобто $g_k = x^{(k)}/P(x^{(k)})$. Однак у загальному випадку значення $P(x_m)$ може бути ненульовим лише для скінченної кількості векторів, і тому не можна стверджувати, що будь-який поліном на X є симетричним відносно деякого базису в нескінченновимірному підпросторі. У цьому розділі розглянемо нулі субсиметричних поліномів і лінійний підпростір V для заданого субсиметричного полінома P такого, що обмеження P на V є нетривіальним симетричним поліномом у деякому базисі.

Для заданого натурального числа N позначимо через Ξ_N такий гомоморфізм $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$,

$$\Xi_N(P)(x) = P(x \triangleleft (-1)^{1/N} x),$$

де $(-1)^{1/N}$ – головне значення N -того кореня з -1 .

Твердження 2.8. *Нехай $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ – M -однорідний стандартний поліном у $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$. Тоді $\Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ є однорідним поліномом, $\deg \Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = M$ або $\Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = 0$. Якщо $M = N$, тоді $\Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{S}}^{(n-1)}(\ell_p)$.*

Доведення. Згідно з (2.3) маємо

$$\begin{aligned} \Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})(x) &= P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) + \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n}{N}} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x) P_{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n}(x) + \\ &+ (-1)^{M/N} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x). \end{aligned}$$

Таким чином, $\deg \Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = M$ if $\Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) \neq 0$.

Якщо $M = N$, тоді

$$\Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n}{N}} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x) P_{\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n}(x).$$

Отже, для цього випадку, $\Xi_N(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n})$ є алгебраїчною комбінацією поліномів у $\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(n-1)}(\ell_p)$. \square

Зауважимо, що якщо $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} = P_N$, то $\Xi_N(P_N) = 0$.

Наслідок 2.5. *Нехай P – однорідний субсиметричний поліном на ℓ_p . Тоді існує скінченна послідовність натуральних чисел N_1, N_2, \dots, N_m така, що*

$$\Xi_{N_m} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P) = 0,$$

де “ \circ ” є композицією відображень.

Доведення. Припустимо, що $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(n)}(\ell_p)$ та $P \notin \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(n-1)}(\ell_p)$ для деякого $n \in \mathbb{N}$. Тоді P є скінченною алгебраїчною комбінацією стандартних поліномів Q_1, Q_2, \dots в $\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(n)}(\ell_p)$. Деякі з них, можна вважати, що $Q_{i_1}, Q_{i_2} \dots Q_{i_s}$ не належать $\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(n)}(\ell_p) \setminus \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(n-1)}(\ell_p)$. Нехай $N_1 = \deg Q_{i_1}$, $N_2 = \deg Q_{i_2}$ і т.д. Тоді за твердженням 2.8

$$\Xi_{N_s} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P) \in \mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(n-1)}(\ell_p),$$

або $\deg \Xi_{N_s} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P) = \deg P$, або $P = 0$. Якщо $P \neq 0$, то можна застосувати ці дії до $\Xi_{N_s} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P)$. Оскільки $\Xi_N(P_N) = 0$, то після деякої скінченної кількості m кроків отримаємо $\Xi_{N_m} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P) = 0$. \square

Нагадаємо, що якщо e_n є базисом Шаудера банахового простору X , то кожен $x \in X$ має єдине зображення $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ для деяких чисел x_n таких, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{n=1}^m x_n e_n \right\| = 0$$

(див. [37]).

Теорема 2.4.

(i) Для кожного субсиметричного однорідного полінома P на ℓ_p та натурального числа d існує d -вимірний підпростір V_d у ℓ_p і лінійний базис (g_i) у V_d такі, що P є симетричним на V_d відносно цього базису.

(ii) Для кожного субсиметричного однорідного полінома P на ℓ_p існує цілком впорядкована множина \mathfrak{A} , нескінченновимірний підпростір V у $\ell_p(\mathfrak{A})$, та базис Шаудера (g_i) у V такі, що $P^{\mathfrak{A}}$ є симетричним на V відносно цього базису.

Доведення. (i) Для заданих d та $N_1 \in \mathbb{N}$ розглянемо наступний підпростір

$$V_d^{(1)} = \{(x_1, \dots, x_d, (-1)^{1/N_1} x_1, \dots, (-1)^{1/N_1} x_d, 0, 0, \dots)\} \subset \ell_p.$$

Простір $V_d^{(1)}$ є d -вимірним підпростором у ℓ_p з базисом

$$g_k^{(1)} = \underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, (-1)^{1/N_1}, 0, \dots)}_{k}, \quad k = 1, \dots, d.$$

Якщо

$$y = (x_1, \dots, x_d, (-1)^{1/N_1} x_1, \dots, (-1)^{1/N_1} x_d, 0, 0, \dots),$$

тоді $P(y) = \Xi_{N_1}(P)(x_1, \dots, x_d, 0, \dots)$.

Для іншого числа N_2 можна побудувати простір $V_d^{(2)}$ так, що для кожного $z \in V_d^{(2)}$,

$$P(z) = \Xi_{N_2} \circ \Xi_{N_1}(P)(x_1, \dots, x_d, 0, \dots).$$

Справді, нехай $V_d^{(2)}$ складається векторів вигляду

$$z = (x_1, \dots, x_d, (-1)^{1/N_1} x_1, \dots, (-1)^{1/N_1} x_d, (-1)^{1/N_2} x_1, \dots, (-1)^{1/N_2} x_d, (-1)^{1/(N_1 N_2)} x_1, \dots, (-1)^{1/(N_1 N_2)} x_d, 0, \dots).$$

Тоді,

$$\begin{aligned} & \Xi_{N_2} \circ \Xi_{N_1}(P)(x_1, \dots, x_d, 0, \dots) = \\ & = \Xi_{N_2}(P)(x_1, \dots, x_d, (-1)^{1/N_1} x_1, \dots, (-1)^{1/N_1} x_d, 0, \dots) = P(z). \end{aligned}$$

Очевидно, $V_d^{(2)}$ є d -вимірним підпростором та

$$g_k^{(2)} = \left(\underbrace{0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0}_{k}, \underbrace{0, \dots, 0, (-1)^{1/N_1}}_{k}, \underbrace{0, \dots, 0, (-1)^{1/N_2}, 0, \dots, 0, (-1)^{1/(N_1 N_2)}}_{k}, 0, \dots \right),$$

$k = 1, \dots, d$ є базисом. Продовжуючи цей процес, для довільної скінченної послідовності N_1, \dots, N_m можна побудувати такі підпростори, що для кожного $1 \leq j \leq m$ існує d -вимірний підпростір $V_d^{(j)}$ з базисом $g_1^{(j)}, \dots, g_d^{(j)}$ для якого

$$P\left(\sum_{i=1}^j x_i g_i^{(j)}\right) = \Xi_{N_j} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P)(x_1, \dots, x_d, 0, \dots).$$

Звідси випливає, що обмеження P на $V_d^{(j)}$ є субсиметричним відносно базису $(g_i^{(j)})$. Нехай тепер послідовність N_1, \dots, N_m , як у наслідку 2.5. Тоді, для деякого $j \leq m$ поліномом $\Xi_{N_j} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P)$ належить $\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{(1)}(\ell_p)$, тоді як $\Xi_{N_{j-1}} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P)$ – не належить. Отже, простір $V_d = V_d^{(j)}$ та його базис $(g_i) = (g_i^{(j)})$ є такими, що звуження P на $V_d = V_d^{(j)}$ є симетричним відносно перестановок базису (g_i) .

(ii) Як було зауважено вище, функціонал $\delta_{x \prec y}$ не є функціоналом значення в точці, але його можна представити як функціонал значення в деякій точці простору $\mathcal{P}_{\mathfrak{G}}^{\mathfrak{A}}(\ell_p(\mathfrak{A}))$ для деякої множини \mathfrak{A} . Нехай (\mathfrak{A}, \preceq) – цілком впорядкована множина вигляду

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}_k,$$

де кожна \mathbb{N}_k – множина упорядкована так само, як \mathbb{N} , тобто $n \preceq m$ тоді і тільки тоді, коли $n \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}_k$. Якщо $n \in \mathbb{N}_k$ та $m \in \mathbb{N}_j$, $k \neq j$, то $n \prec m$ тоді і тільки тоді, коли $k < j$. Нехай (e_i^k) – стандартний базис у $\ell_p(\mathbb{N}_k)$, тобто

$$e_i^k = (\underbrace{0, \dots, 0}_i, 1, 0 \dots), \quad i \in \mathbb{N}_k.$$

Кожний вектор $y \in \ell_p(\mathfrak{A})$ можна подати у вигляді

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_i^k e_i^k$$

для деяких комплексних чисел y_i^k таких, що

$$\|y\|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i^k|^p < \infty.$$

Для фіксованого $N_1 \in \mathbb{N}$ розглянемо наступний підпростір $V^{(1)}$ простору $\ell_p(\mathfrak{A})$,

$$V^{(1)} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i^1 + (-1)^{1/N_1} \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i^2 \right\},$$

де $x = (x_1, x_2, \dots)$ пробігає ℓ_p . Бачимо, що

$$\Xi_{N_1}(P)(x) = P^{\mathfrak{A}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i^1 + (-1)^{1/N} \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i^2 \right).$$

Крім того, легко перевірити, що вектори $g_i^{(1)} = e_i^1 + (-1)^{1/N_1} e_i^2$ лінійно незалежні та утворюють базис Шаудера у $V^{(1)}$. Припустимо, що для заданих натуральних чисел N_1, \dots, N_m ми вже побудували підпростір $V^{(m-1)} \subset \ell_p(\mathfrak{A})$ вигляду

$$\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} y_i^1 e_i^1 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 e_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^r e_i^r \right\}$$

для деякого скінченного числа r та базиса Шаудера $(g_i^{(m-1)})$ у $V^{(m-1)}$ таких, що

$$\Xi_{N_{m-1}} \circ \dots \circ \Xi_{N_1}(P)(x) = P \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i g_i^{(m-1)} \right).$$

Тоді простір $V^{(m)}$ визначається як

$$V^{(m)} = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} y_i^1 e_i^1 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 e_i^2 + \cdots + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^r e_i^r + \right. \\ \left. + (-1)^{1/N_m} \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^1 e_i^{r+1} + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 e_i^{r+2} + \cdots + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^r e_i^{2r} \right) \right\},$$

а базис $(g_i^{(m)})$ – як

$$g_i^{(m)} = g_i^{(m-1)} + (-1)^{1/N_m} g_i^{(m-1)}.$$

Беручи послідовність N_1, \dots, N_m як у наслідку 2.5, отримаємо, що для деякого $j \leq m$ поліном $\Xi_{N_j} \circ \cdots \circ \Xi_{N_1}(P)$ є симетричним відносно базису $(g_i^{(j)})$. Отже, простір $V_d = V_d^{(j)}$. \square

Покажемо, що існують скінченновимірні підпростори такі, що звуження будь-якого субсиметричного полінома спеціального вигляду на ці підпростори є симетричним відносно деякого базису.

Твердження 2.9. *Для довільного числа $d \in \mathbb{N}$ існує d -вимірний підпростір V_d у ℓ_p такий, що кожен поліном $P_{k,m}$ є нетривіальним і симетричним на V_d відносно деякого базису.*

Доведення. Зауважимо, що

$$\Theta(P_{k,m})(x) = \delta_{\tilde{x} \langle x} (P_{k,m}) = \delta_{\tilde{x}}(P_{k,m}) + P_k(x)P_m(x) + P_{k,m}(x) \\ = P_{m,k}(x) + P_k(x)P_m(x) + P_{k,m}(x)$$

є нетривіальним симетричним поліномом. Отже, звуження $P_{k,m}$ на d -вимірний підпростір, утворений векторами

$$g_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, 0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_k), \quad 1 \leq k \leq d$$

буде симетричним відносно (g_k) . \square

Твердження 2.10. *Для довільного числа $d \in \mathbb{N}$ існує d -вимірний підпростір V_d у ℓ_p такий, що кожен поліном вигляду $A_{k,m} = P_{k,m} - P_{m,k}$, де $0 < k < m$, тотожно дорівнює нулю на V_d .*

Доведення. З прямих обчислень бачимо, що

$$\Theta(A_{k,m}) = \Theta(P_{k,m} - P_{m,k}) = P_{m,k} + P_k P_m + P_{k,m} - P_{m,k} - P_k P_m - P_{k,m} \equiv 0$$

для кожного $A_{k,m}$. Тому кожен поліном $A_{k,m}$ дорівнює нулю на підпросторі V_d , як у твердженні 2.9. \square

2.6. Алгебри субсиметричних поліномів

Нехай X – комплексний банахів простір з субсиметричним базисом (e_j) . Нагадаємо, що напівгрупа \mathfrak{S} породжену множиною лінійних операторів \mathcal{C}_j , $j \in \mathbb{N}$, на X

$$\mathcal{C}_j: (x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, x_{j+1}, \dots), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Лема 2.1. *Нехай Q_1, \dots, Q_m – скінченна послідовність попарно різних поліномів на X така, що*

$$\{Q_1 \circ A, \dots, Q_m \circ A\} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$$

для всіх $A \in \mathfrak{S}$. Тоді всі поліноми Q_1, \dots, Q_m є субсиметричними.

Доведення. Припустимо, що Q_i не є субсиметричним поліномом для деякого $1 \leq i \leq m$. Якщо j та k – натуральні числа такі, що $Q_i \circ \mathcal{C}_k = Q_j$, тоді

$$Q_i(x) = Q_j(x) \quad \text{для будь-якого } x \text{ вигляду } x = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, 0, \dots).$$

Справді,

$$\mathcal{C}_k((x_1, \dots, x_{k-1}, 0, 0, \dots) = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, 0, \dots))$$

за означенням \mathcal{C}_k . Нехай r – максимальне натуральне число таке, що $Q_i(x) = Q_s(x)$ для деякого $s \neq i$ та будь-якого x у вигляді $x = (x_1, \dots, x_{r-1}, 0, 0, \dots)$. Оскільки всі поліноми Q_1, \dots, Q_m попарно різні, $r < \infty$. Тому

$$Q_i \circ \mathcal{C}_l \notin \{Q_1, \dots, Q_m\} \setminus \{Q_i\}$$

для кожного $l > r$. Дійсно, якщо $Q_i \circ \mathcal{C}_l = Q_s$ для деякого $s \neq i$, тоді $Q_i(x) = Q_s(x)$ для будь-якого x вигляду $x = (x_1, \dots, x_{l-1}, 0, 0, \dots)$, що суперечить максимальності r . Таким чином, $Q_i \circ \mathcal{C}_l = Q_i$ для кожного $l > r$. Нехай

$$A_{r-1} = \underbrace{\mathcal{C}_1 \circ \dots \circ \mathcal{C}_1}_{r-1}.$$

Тоді $Q_i \circ A_{r-1}$ є субсиметричним. Справді,

$$\begin{aligned} (Q_i \circ A_{r-1}) \circ C_j(x) &= Q_i(\underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots) = \\ &= Q_i(\underbrace{0, \dots, 0}_{r-1}, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

для будь-якого $j \in \mathbb{N}$. Оскільки $Q_i \circ A_{r-1} \in \{Q_1, \dots, Q_m\}$, існує число $1 \leq s \leq m$ таке, що $Q_i \circ A_{r-1} = Q_s$, Q_s є субсиметричним, але $i \neq s$ (тому що Q_i не є субсиметричним).

Нехай $1 \leq h \leq m$ таке, що $Q_h \circ A_{r-1} = Q_i$. Тоді $h \neq s$, $h \neq i$ та

$$(Q_h \circ A_{r-1}) \circ A_{r-1} = Q_{s'}$$

є субсиметричним поліномом в $\{Q_1, \dots, Q_m\}$. Оскільки ця множина поліномів скінченна, знайдемо відображення $A \in \mathfrak{S}$ і $1 \leq t \leq m$ таке, що $Q_t \circ A$ є субсиметричним, а Q_t не належить множині $\{Q_1 \circ A, \dots, Q_m \circ A\}$. Суперечність з умовою леми. \square

Підмножина $V \subset X$ називається *субсиметричною*, якщо для будь-якого $x \in V$ та $A \in \mathfrak{S}$ маємо $A(x) \in V$.

Теорема 2.5. *Нехай P – ненульовий поліном на X такий, що $\ker P$ є субсиметричною підмножиною X . Тоді P є субсиметричним. Більше того, якщо $P = Q_1^{k_1} \dots Q_m^{k_m}$ для деяких взаємно різних незвідних поліномів Q_1, \dots, Q_m , тоді всі поліноми Q_1, \dots, Q_m є субсиметричними.*

Доведення. Спочатку припустимо, що P є незвідним поліномом. Оскільки $\ker P$ є субсиметричною множиною, $\ker P = \ker P \circ C_j$, а також згідно з теорією нулів Гільберта для нескінченновимірних просторів (див., наприклад, [53]),

$$P \circ C_j = a_j P$$

для деякої константи $a_j \neq 0$. Ми стверджуємо, що $a_j = a_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Дійсно, позначаючи $a = a_1$, отримаємо

$$P \circ C_1^j = P \circ \underbrace{(C_1, \dots, C_1)}_j = a^j P.$$

З іншого боку,

$$P \circ \mathcal{C}_1^j = (P \circ \mathcal{C}_j) \circ \mathcal{C}_1^{j-1} = a_j P \circ \mathcal{C}_1^{j-1} = a_j a^{j-1}.$$

Таким чином, $a_j = a$ для будь-якого $j \in \mathbb{N}$.

Очевидно, для будь-якого скінченного вектора $x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$, $x = \mathcal{C}_{n+1}(x)$, тому

$$P(x) = P \circ \mathcal{C}_{n+1}(x) = aP(x).$$

Оскільки множина скінчених векторів щільна в X та P не дорівнює нулю, $a = 1$. Отже, P є субсиметричним.

Нехай тепер P – радикальний поліном. Тобто $P = Q_1 \cdots Q_m$ для деяких взаємно різних незвідних поліномів Q_1, \dots, Q_m . Таким чином, $\ker P$ – це об'єднання алгебраїчних множин $\ker Q_1, \dots, \ker Q_m$. Умова, що $\ker P$ є субсиметричним і теорема нулів Гільберта означають, що для кожного $A \in \mathfrak{S}$ існує константа $a \neq 0$ така, що $P = aP \circ A$. Міркуючи, як і вище, можна побачити, що $a = 1$. Отже,

$$\{Q_1 \circ A, \dots, Q_m \circ A\} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$$

для будь-якого $A \in \mathfrak{S}$. За лемою 2.1, усі поліноми Q_1, \dots, Q_m є субсиметричними, а отже, P є субсиметричним.

У загальному випадку, нехай $P = Q_1^{k_1} \cdots Q_m^{k_m}$ для деяких взаємно різних незвідних поліномів Q_1, \dots, Q_m . Тоді, як було доведено вище, $\text{Rad} P = Q_1 \cdots Q_m$ є субсиметричним та всі поліноми Q_1, \dots, Q_m є субсиметричними. Отже, P має бути субсиметричним. \square

Наслідок 2.6. *Алгебра субсиметричних поліномів на X є факторіальною.*

Доведення. Нехай P – субсиметричний поліном на X та $P = Q_1^{k_1} \cdots Q_m^{k_m}$ для деяких попарно різних незвідних поліномів Q_1, \dots, Q_m . Тоді $\ker P$ – субсиметрична підмножина в X і за теоремою 2.5, Q_1, \dots, Q_m є субсиметричними. Оскільки в кільці поліномів на X кожен поліном подіється єдиним чином (з точністю до мультиплікативної константи), як добуток

незвідних поліномів, для будь-якого представлення $P = P_1 P_2$ отримаємо, що поліноми P_1 та P_2 є незідними. \square

2.7. Прото-субсиметричні функції

Оскільки напівгрупа \mathfrak{S} не є групою, то з того, що функція $f \circ A$ є субсиметричною для деякого $A \in \mathfrak{S}$ не випливає, що f є субсиметричною.

Скажемо, що функція f , визначена на S -симетричній підмножині V , називається прото- S -інваріантною, для деякої напівгрупи симетрій S , якщо існує оператор $A \in S$ такий, що $f \circ A$ є S -інваріантною на V . Також, f є L -прото- S -інваріантною на V , якщо існує послідовність A_j операторів в S така, що границя

$$h(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} (f \circ A_j)(x)$$

існує для кожного $x \in V$ та h є S -інваріантною на V . Легко бачити, що якщо S є групою, то кожна прото- S -інваріантна функція є S -інваріантною. Як зазначалося в твердженні 2.1, неперервна функція є субсиметричною (тобто \mathfrak{S} -симетричною) тоді і тільки тоді, коли вона є $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричною. Для прото- S -інваріантних функцій ситуація є іншою.

Приклад 2.7. Розглянемо наступні функції:

1.

$$W_k(x) = \sum_{i=2}^{\infty} x_i^k.$$

2.

$$Q_2(x) = \sum_{i < j+1} x_i x_j^2 = x_1 \sum_{j=2}^{\infty} x_j^2 + x_2 \sum_{j=3}^{\infty} x_j^2 + \cdots + x_n \sum_{j=n+2}^{\infty} x_j^2 + \cdots.$$

3.

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^n.$$

Тоді поліном W_k не є субсиметричним, але прото- \mathfrak{S} -інваріантним на ℓ_p , $k \leq [p]$, оскільки

$$W_k(\mathcal{C}_1(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

є субсиметричним на ℓ_p . Легко перевірити, що Q_2 не є прото- \mathfrak{S} -інваріантним, але є прото- $\overline{\mathfrak{S}}$ -інваріантним. Справді, нехай $\mathbf{n} = (1, 3, \dots, 2n - 1, \dots)$, тоді

$$\mathcal{C}_{\mathbf{n}}(x) = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots),$$

та

$$Q_2(\mathcal{C}_{\mathbf{n}}(x)) = \sum_{i < j} x_i x_j^2$$

є субсиметричним поліномом, а тому і $\overline{\mathfrak{S}}$ -інваріантним. Зауважимо, що Q_2 також є L -прото- \mathfrak{S} -інваріантним. Дійсно, для $A_n = \mathcal{C}_{2n} \circ \mathcal{C}_{2(n-1)} \circ \dots \circ \mathcal{C}_2$ отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Q_2 \circ A_n)(x) = \sum_{i < j} x_i x_j^2.$$

Функція u є аналітичною функцією необмеженого типу на ℓ_1 , яка є обмеженою на замкненій одиничній кулі ℓ_1 і необмеженою на будь-якій кулі з центром у нулі радіуса $r > 1$. Кожен поліном u_n є прото- \mathfrak{S} -інваріантним, але u не є прото- $\overline{\mathfrak{S}}$ -інваріантною. Обмеження u на замкнену одиничну кулю є L -прото- \mathfrak{S} -інваріантним. Справді, підставляючи $A_j = \mathcal{C}_1^j$, отримаємо, що

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (u \circ A_j)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$$

є коректно визначеною та субсиметричною для $\|x\| \leq 1$.

Легко перевірити, що множина прото- \mathfrak{S} -інваріантних аналітичних функцій обмеженого типу утворює алгебру, яка не є повною в загальному випадку.

Приклад 2.8. Нехай $f \in H_{\mathfrak{S}b}(X)$. Покладемо

$$s_m(x) = \sum_{n=1}^m \frac{f(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)}{2^n}.$$

Для кожного m функція s_m є прото- \mathfrak{S} -інваріантною, оскільки

$$(s_m \circ \mathcal{C}_1^m)(x) = f(x) \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} = \frac{2^m - 1}{2^m} f(x)$$

є субсиметричною. Але гранична функція

$$s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)}{2^n}$$

не є прото- \mathfrak{S} -інваріантною. Зауважимо, що $s \in L$ -прото- \mathfrak{S} -інваріантною, оскільки

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (s \circ C_1^m)(x) = f(x).$$

Наступна теорема є узагальненням наслідку 2.6.

Теорема 2.6. *Нехай напівгрупа операторів S на X така, що алгебра $\mathcal{P}_S(X)$ є факторіальною. Тоді алгебра прото- S -інваріантних поліномів також є факторіальною. Зокрема, алгебра прото-субсиметричних поліномів є факторіальною.*

Доведення. Припустимо, що $P = Q_1 \cdots Q_m$ є прото- S -інваріантним поліномом на X . Тоді $P \circ A \in \mathcal{P}_S(X)$ для деякого $A \in S$. З іншого боку,

$$P \circ A = (Q_1 \circ A) \cdots (Q_m \circ A).$$

Таким чином, кожний множник $Q_i \circ A \in S$ -інваріантним, тобто кожний Q_i є прото- S -інваріантним. \square

2.8. Апроксимація субсиметричних функцій

У цьому підрозділі розглянемо умови, коли субсиметричну функцію на банаховому просторі можна апроксимувати субсиметричними аналітичними функціями або поліномами.

Якщо f – аналітична функція на області \mathcal{O} комплексного банахового простору X , то за означенням, для кожного $x \in \mathcal{O}$ існує окіл U точки x , $U \subset \mathcal{O}$ та однорідні неперервні поліноми g_n такі, що

$$f(x + y) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y) \quad (2.8)$$

для кожного $y \in U$, причому ряд збігається абсолютно та рівномірно на U . Але, якщо f є S -інваріантною, для деякої напівгрупи симетрій S , то для деякого фіксованого $x \in X$ функція $y \mapsto f(x+y)$ не обов'язково має бути S -інваріантною, і поліноми g_n не обов'язково повинні бути S -інваріантними.

Приклад 2.9. Нехай $X = \ell_1$, $f(x) = P_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$. Тоді f є субсиметричною (навіть симетричною), тоді як

$$f(x + y) = P_2(x + y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$$

є субсиметричною функцією від y лише якщо $x = 0$.

Легко бачити, що якщо f – субсиметрична аналітична функція в області \mathcal{O} , що містить нуль, то поліноми g_n розкладу в ряд Тейлора (2.8) є субсиметричними, якщо $x = 0$ і не обов'язково субсиметричними в іншому випадку.

Із означення субсиметричних функцій маємо наступне твердження.

Твердження 2.11. Якщо f – субсиметрична функція на субсиметричній підмножині $\Omega \subset X$, тоді для кожних x, y і z в X таких, що $y \triangleleft x \triangleleft z \in \Omega$ функція $x \mapsto f(y \triangleleft x \triangleleft z)$ є субсиметричною.

Враховуючи неперервність стандартних поліномів та рівняння (2.3), отримаємо наслідок.

Наслідок 2.7. Якщо $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(X)$, тоді для кожних y і z в X функція $x \mapsto P(y \triangleleft x \triangleleft z)$ належить $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(X)$.

Теорема 2.7. Нехай f – аналітична функція на субсиметричній відкритій підмножині \mathcal{O} простору X . Для кожного $x \in \mathcal{O} \cap c_{00}$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що функція $g(y) = f(x \triangleleft y)$ є аналітичною і субсиметричною у відкритій кулі $\varepsilon\mathcal{B}_X = \{y \in X: \|y\| < \varepsilon\}$.

Доведення. Нехай $x = (x_1, \dots, x_m, 0 \dots)$ для деякого $m \in \mathbb{N}$. Тоді функція $z \mapsto f(x + z)$ є аналітичною в $\varepsilon\mathcal{B}_X$ для деякого $\varepsilon > 0$. Нехай

$$f(x + z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z)$$

– розклад у ряд Тейлора функції $f(x + \cdot)$ в $\varepsilon\mathcal{B}_X$. Якщо $y \in \varepsilon\mathcal{B}_X$, тоді

$$z = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, y_1, y_2, \dots \right) \in \varepsilon\mathcal{B}_X.$$

З іншого боку, $x + z = x \triangleleft y$, а тому

$$f(x \triangleleft y) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, y_1, y_2, \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(y),$$

де

$$g_n(y) = h_n \left(\underbrace{0, \dots, 0}_m, y_1, y_2, \dots \right).$$

Оскільки функція $y \mapsto f(x \triangleleft y)$ є субсиметричною, то кожний n -однорідний поліном g_n є субсиметричним. Справді, субсиметричність поліномів g_n випливає з субсиметричності $f(x \triangleleft y)$ при фіксованому x за допомогою формули 1.2. \square

Як ми знаємо, якщо $(\mathfrak{A}, \triangleleft)$ – цілком впорядкована нескінченна множина, то існує ізоморфне вкладення

$$J_{\mathfrak{A}}: \ell_p \hookrightarrow \ell_p(\mathfrak{A})$$

таке, що

$$J_{\mathfrak{A}}: e_k \mapsto \mathbf{e}_{\gamma_k}$$

і з $k < m$ впливає, що $\gamma_k \prec \gamma_m$. Крім того, кожний стандартний поліном $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ на ℓ_p можна продовжити до полінома $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\mathfrak{A}}$ на $\ell_p(\mathfrak{A})$ за формулою

$$P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{\mathfrak{A}}(z) = \sum_{\gamma_1 \prec \dots \prec \gamma_n} z_{\gamma_1}^{\alpha_1} \cdots z_{\gamma_n}^{\alpha_n}$$

і оператор продовження є лінійним та мультиплікативним. Із того факту, що кожен поліном з $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_p)$ є скінченною лінійною комбінацією стандартних поліномів, впливає, що кожен субсиметричний поліном P на ℓ_p можна продовжити до полінома $P^{\mathfrak{A}}$ на $\ell_p(\mathfrak{A})$, причому легко перевірити, що $\|P\| = \|P^{\mathfrak{A}}\|$. Також, \mathfrak{A} та $J_{\mathfrak{A}}$ можна вибрати так, що для заданих x і y в ℓ_p існують \tilde{x} та \tilde{y} в $\ell_p(\mathfrak{A})$ такі, що

$$P(x \triangleleft y) = P^{\mathfrak{A}}(\tilde{x} + \tilde{y}) \quad (2.9)$$

для кожного $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_p)$. Наприклад, нехай $\mathfrak{A} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2$, де \mathbb{N}_1 та \mathbb{N}_2 – множини, кожна з яких отожднюється з множиною натуральних чисел зі звичайним порядком, і якщо $i \in \mathbb{N}_1$ та $j \in \mathbb{N}_2$, тоді $i \prec j$. Якщо x і y належать ℓ_p , тоді

$$\tilde{x} + \tilde{y} = (x_1, \dots, x_i, \dots) + (y_1, \dots, y_j, \dots) \in \ell_p(\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2), \quad i \in \mathbb{N}_1, j \in \mathbb{N}_2.$$

Отже, $P(x \triangleleft y) = P^{\mathfrak{A}}(\tilde{x} + \tilde{y})$.

Беручи до уваги формулу (2.9) і діючи так само, як у доведенні теореми 2.7, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 2.8. *Нехай f – аналітична функція на субсиметричній відкритій підмножині \mathcal{O} простору ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. Для кожного $x \in \mathcal{O}$ існує $\varepsilon > 0$ таке, що функція $g(y) = f(x \triangleleft y)$ є аналітичною та субсиметричною у відкритій кулі $\varepsilon \mathcal{B}_{\ell_p} = \{y \in X : \|y\| < \varepsilon\}$.*

Надалі працюватимемо з дійсними банаховими просторами. Для подальшого аналізу зафіксуємо кілька відомих фактів і формулювань, що слугуватимуть підготовкою до наступних результатів.

Згідно з [8], дійсна аналітична функція g на X є рівномірно аналітичною, якщо радіус рівномірної збіжності g у будь-якій точці $x \in X$ більший

або дорівнює R_g для деякого $R_d > 0$. Дійсна аналітична функція g на X є відокремлювальною, якщо множина $\{x \in X: d(x) < \alpha\}$ є непорожньою підмножиною одиничної кулі \mathcal{B}_X простору X . Кожен поліном є, очевидно, рівномірно аналітичною функцією. Для того, щоб однорідний поліном P був відокремлювальний необхідно і достатньо щоб існувала константа $c > 0$ така, що $P(x) \geq c$ для кожного x , $\|x\| = 1$ ([8], стр. 93). Тобто, якщо на X існує відокремлювальний поліном, то на X існує також рівномірно аналітична відокремлювальна функція. Прикладом відокремлювального полінома на гільбертовому просторі є $P(x) = (x, x)$, де (x, x) – скалярний добуток. З іншого боку, на будь-якому замкненому підпросторі простору c_0 існує рівномірно аналітична відокремлювальна функція (див. [8]), тоді як у самому просторі c_0 і його замкнених підпросторах не існує відокремлювального полінома. Зокрема,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{2n}$$

є рівномірно аналітичною відокремлювальною функцією на c_0 .

Теорема 2.8. ([8]) *Нехай X – дійсний сепарабельний банахів простір, на якому існує рівномірно аналітична відокремлювальна функція, O – деяка відкрита підмножина простору X , а f – рівномірно неперервне відображення, визначене на O та зі значеннями, що лежать у замкненій підмножині C довільного банахового простору Y . Тоді, для кожного $\varepsilon > 0$, існує аналітичне відображення h , визначене на O та зі значенням в C таке, що*

$$\|f(x) - h(x)\| < \varepsilon, \quad \text{для будь-якого } x \in O.$$

У [26] (теорема 2.3) доведено, що для заданого дійсного банахового простору X з субсиметричним базисом (e_n) та N -однорідного полінома на X існує N -однорідний субсиметричний поліном P^* на X такий, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує нескінченна множина цілих індексів H таких, що

$$\|P - P^*\|_{X_H} \leq \varepsilon,$$

де X_H – замкнений підпростір, породжений $\{e_n: n \in H\}$. Крім того, для кожного $k \in \mathbb{N}$

$$P^* \left(\sum_{i=1}^k x_i e_i \right) = \lim_{\substack{n_1 < \dots < n_k, \\ n_j \in H}} P \left(\sum_{i=1}^k x_i e_{n_i} \right)$$

(див. [26]), і тому $\|P^*\| = \|P\|$, а відображення $P \mapsto P^*$ є гомоморфізмом алгебр [10].

Теорема 2.9. *Нехай X – дійсний банахів простір із субсиметричним базисом, а $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – рівномірно неперервна субсиметрична функція. Якщо існують числа $r > 0$, $\varepsilon > 0$ та аналітична рівномірно неперервна функція $h: r\mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}$ така, що*

$$\sup_{\|x\| \leq r} |f(x) - h(x)| < \varepsilon,$$

то існує субсиметрична аналітична функція $u: R\mathcal{B}_X \rightarrow \mathbb{R}$ така, що

$$\sup_{x \in R\mathcal{B}_X} |f(x) - u(x)| < \varepsilon,$$

де $R = \frac{r}{2\varepsilon}$.

Доведення. Нехай $f^{\mathbb{C}}$ та $h^{\mathbb{C}}$ – аналітичні продовження функцій f і h відповідно. Тоді вони є аналітичними в $\frac{r}{2\varepsilon}$ -околі точки $(x, 0) \in X^{\mathbb{C}}$. Нехай H – підмножина \mathbb{N} така, що

$$|(h^{\mathbb{C}})^*(x) - h^{\mathbb{C}}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in R\mathcal{B}_{X^{\mathbb{C}}} \cap X_H^{\mathbb{C}}.$$

Тоді, також

$$|h^*(x) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in R\mathcal{B}_X \cap X_H.$$

Оскільки функція f є субсиметричною та неперервною, то вона є $\overline{\mathfrak{S}}$ -симетричною (за твердженням 2.1), тому

$$f(x) = f(\mathcal{C}_H(x)) = f \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_i e_{i_k} \right), \quad (i_1, \dots, i_k, \dots) = H.$$

Зауважимо, що $x \in R\mathcal{B}_X$ означає $\mathcal{C}_H(x) \in R\mathcal{B}_X$. Отже,

$$\begin{aligned} \sup_{x \in R\mathcal{B}_X} |f(x) - h^*(x)| &= \sup_{x \in R\mathcal{B}_X \cap X_H} |f(x) - h^*(x)| \\ &\leq \sup_{x \in R\mathcal{B}_X \cap X_H} |f(x) - h(x)| \\ &\quad + \sup_{x \in R\mathcal{B}_X \cap X_H} |h^*(x) - h(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, отримуємо необхідну нерівність для $u = h^*$. □

2.9. Похідні, пов'язані із субсиметричними функціями

У цьому підрозділі ми позначаємо через X банахів простір ℓ_p , $1 \leq p < \infty$ над полем \mathbb{K} дійсних або комплексних чисел.

Оскільки класичний оператор зсуву $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + y)$ не зберігає властивості субсиметричності функції f , класичні оператори диференціювання переводять, в загальному випадку, субсиметричні функції у функції які не є субсиметричними. У цьому підрозділі введено похідні, породжені операцією субсиметричного зсуву $f(\cdot) \mapsto f(\cdot \triangleleft y)$, і встановлено їх зв'язок із похідною Гато на відповідно побудованих банахових просторах. Тому можна застосувати стандартні диференціальні міркування до субсиметричних функцій та отримати явні формули для таких похідних у випадку стандартних субсиметричних поліномів на ℓ_1 .

Означення 2.2. *Субсиметрична функція f на X , що набуває значень в деякому банаховому просторі, називається:*

- субсиметрично диференційовною зліва (або ∂_L -диференційовною) за елементом $h \in X$ в точці $x \in X$, якщо існує границя

$$\partial_L f(x)(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(th \triangleleft x) - f(x)}{t};$$

- субсиметрично диференційовною справа (або ∂_R -диференційовною) за елементом $h \in X$ у точці $x \in X$, якщо існує границя

$$\partial_R f(x)(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \triangleleft th) - f(x)}{t};$$

- субсиметрично диференційовною в середині (або ∂_M -диференційовною) за елементом $h \in X$ у точках $x, y \in X$, якщо існує границя

$$\partial_M f(x, y)(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \triangleleft th \triangleleft y) - f(x \triangleleft y)}{t},$$

де t – скаляр з поля \mathbb{K} .

Теорема 2.10. *Існують цілком впорядковані множини \mathfrak{A}_R , \mathfrak{A}_L та \mathfrak{A}_M такі, що для всіх x, y та h в X існують $x_R, h_R \in \mathfrak{A}_R$, $x_L, h_L \in \mathfrak{A}_L$ і $x_M, y_M, h_M \in \mathfrak{A}_M$ такі, що для кожної субсиметричної продовжувальної функції f , що набуває значень у деякому банаховому просторі,*

$$\partial_R f(x)(h) = df^{\mathfrak{A}_R}(x_R)(h_R),$$

$$\partial_L f(x)(h) = df^{\mathfrak{A}_L}(x_L)(h_L),$$

$$\partial_M f(x, y)(h) = df^{\mathfrak{A}_M}(x_M + y_M)(h_M),$$

тобто, якщо існують похідні $\partial_R f(x)(h)$, $\partial_L f(x)(h)$ і $\partial_M f(x, y)(h)$, то і існують похідні Гато $df^{\mathfrak{A}_R}(x_R)(h_R)$, $df^{\mathfrak{A}_L}(x_L)(h_L)$, $df^{\mathfrak{A}_M}(x_M + y_M)(h_M)$.

Доведення. Візьмемо $\mathfrak{A}_R = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ з натуральним порядком. Таким чином, $X(\mathfrak{A}_R) = X \times X$. Покладемо $x_R = (x, 0) \in X \times X$ та $h_R = (0, h) \in X \times X$. Тоді, оскільки f -продовжувальна функція,

$$f(x \triangleleft h) = f^{\mathfrak{A}_R}(x_R + h_R)$$

для кожної субсиметричної функції f . Отже,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x \triangleleft th) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{\mathfrak{A}_R}(x_R + th_R) - f^{\mathfrak{A}_R}(x_R)}{t},$$

за умови, що перша границя з рівності існує. Тому в цьому випадку $\partial_R f(x)(h) = df^{\mathfrak{A}_R}(x_R)(h_R)$.

Аналогічно, поклавши $\mathfrak{A}_L = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$, $x_L = (0, x)$ та $h_L = (h, 0)$, отримаємо

$$f(h \triangleleft x) = f^{\mathfrak{A}_L}(x_L + h_L).$$

З тієї самої причини, що й вище, маємо $\partial_L f(x)(h) = df^{\mathfrak{A}_L}(x_L)(h_L)$.

Нарешті, нехай $\mathfrak{A}_M = \mathbb{N} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}$ з натуральним порядком. Тоді $X(\mathfrak{A}_M) = X \times X \times X$. Покладемо $x_M = (x, 0, 0)$, $y_M = (0, 0, y)$ та $h_M = (0, h, 0)$. Очевидно, що

$$f(x \triangleleft h \triangleleft y) = f^{\mathfrak{A}_M}(x_M + y_M + h_M).$$

Міркуючи, як і вище, отримаємо $\partial_M f(x, y)(h) = df^{\mathfrak{A}_M}(x_M + y_M)(h_M)$. \square

Позначимо через ∂ спільне позначення для ∂_R та ∂_L .

Наслідок 2.9. *Якщо f і g – ∂ -диференційовні функції зі значеннями в \mathbb{K} , тоді виконується правило Лейбніца:*

$$\partial(fg)(x)(h) = g(x)\partial(f)(x)(h) + f(x)\partial(g)(x)(h),$$

а якщо f і g – ∂_M -диференційовні функції зі значеннями в \mathbb{K} , тоді

$$\partial(fg)(x, y)(h) = g(x \triangleleft y)\partial(f)(x, y)(h) + f(x \triangleleft y)\partial(g)(x, y)(h), \quad x, y \in X.$$

Доведення. Із правила Лейбніца для похідної Гато та теореми 2.10 випливає, що

$$\begin{aligned} \partial_R(fg)(x)(h) &= d(f^{\mathfrak{A}_R}g^{\mathfrak{A}_R})(x_R)(h_R) \\ &= g^{\mathfrak{A}_R}(x_R)d(f^{\mathfrak{A}_R})(x_R)(h_R) + f^{\mathfrak{A}_R}(x_R)d(g^{\mathfrak{A}_R})(x_R)(h_R) \\ &= g(x)\partial_R(f)(x)(h) + f(x)\partial_R(g)(x)(h). \end{aligned}$$

Аналогічно, те саме виконується і для ∂_L , і для ∂_M . □

Наслідок 2.10. *Нехай f – ∂_R -диференційовна (відповідно, ∂_L -диференційовна, ∂_M -диференційовна) функція зі значеннями в \mathbb{K} і q – деяка диференційовна функція від однієї змінної $t \in \mathbb{K}$. Тоді*

$$\begin{aligned} \partial_R(q(f))(x)(h) &= q'_t(f(x))\partial_R(x)(h) \\ (\text{відповідно } \partial_L(q(f))(x)(h) &= q'_t(f(x))\partial_L(x)(h), \\ \partial_M(q(f))(x, y)(h) &= q'_t(f(x))\partial_M(x, y)(h)). \end{aligned}$$

Доведення наступного твердження випливає з неперервності оператора диференціювання за Гато (який у цьому випадку збігається з диференціюванням за Фреше) в алгебрі аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі.

Наслідок 2.11. *Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Для будь-якого фіксованого $h \in X$ оператори $f(\cdot) \mapsto \partial f(\cdot)(h)$ є неперервними на просторі $H_{b\mathfrak{S}}(X)$.*

Розглянемо випадок, коли $X = \ell_1$.

Твердження 2.12. Для кожного стандартного полінома $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ на ℓ_1 маємо

$$\partial_L P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x)(h) = \begin{cases} P_1(h)P_{\alpha_2, \dots, \alpha_m}(x) & \text{якщо } \alpha_1 = 1, \\ 0 & \text{інакше;} \end{cases}$$

$$\partial_R P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x)(h) = \begin{cases} P_1(h)P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}}(x) & \text{якщо } \alpha_m = 1, \\ 0 & \text{інакше} \end{cases}$$

для всіх x та h з ℓ_1 .

Доведення. Застосовуючи формулу (2.3), отримаємо

$$\begin{aligned} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(th \triangleleft x) - P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x) &= \sum_{j=1}^m P_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}(th) P_{\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m}(x) \\ &= \sum_{j=1}^m t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_j} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}(h) P_{\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_m}(x). \end{aligned}$$

Тобто,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(th \triangleleft x) - P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x)}{t} \neq 0$$

лише тоді, коли $\alpha_1 + \dots + \alpha_j = 1$. Це можливо тільки при $j = 1$ та $\alpha_1 = 1$. У цьому випадку і отримаємо потрібну рівність. Формулу для $\partial_R P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x)(h)$ можна обчислити аналогічно. \square

Твердження 2.13. Для кожного стандартного полінома $P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$ на ℓ_1

$$\partial_M P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x, y)(h) = P_1(h) \sum_{\{k: \alpha_k=1\}} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}}(x) P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}}(y).$$

Доведення. Двічі застосовуючи формулу (2.3), отримаємо

$$\begin{aligned} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x \triangleleft th \triangleleft y) - P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x \triangleleft y) \\ = \sum_{j=0}^{n-1} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_j}(x) \sum_{i=1}^{m-j} t^{\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{j+i}} P_{\alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{j+i}}(h) P_{\alpha_{j+i}, \dots, \alpha_m}(y). \end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x \triangleleft th \triangleleft y) - P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x \triangleleft y)}{t} \neq 0$$

лише, якщо $\alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{j+i} = 1$ для деяких i та j . Це можливо лише тоді, якщо $\alpha_k = 1$ для деякого $k = j + 1$ та $i = 1$. Таким чином,

$$\partial_M P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}(x, y)(h) = \sum_{\{k: \alpha_k=1\}} P_1(h) P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}}(x) P_{\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}}(y).$$

□

Отримані результати уточнюють диференціальну структуру класу субсиметричних функцій і можуть бути використані в подальшому дослідженні їх аналітичних та алгебраїчних властивостей.

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА ОПЕРАТОРІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ З СИМЕТРИЧНИМИ ТА СУБСИМЕТРИЧНИМИ СТРУКТУРАМИ

У цьому розділі досліджуються структури метричного простору на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин, а також аналоги операторів лівого зсуву в цих просторах. Основна увага приділяється побудові відповідних метрик і вивченню динамічних властивостей операторів лівого зсуву. Крім того, розглянуто динамічні властивості операторів субсиметричного диференціювання.

Спочатку ми вводимо метрики на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин та розглядаємо їх властивості. Після цього досліджуємо аналоги операторів лівого зсуву у відповідних метричних просторах мультимножин і впорядкованих мультимножин, що дає змогу порівняти їхню динаміку.

Отримані результати використовуються для подальшого аналізу динаміки нелінійних операторів, пов'язаних із розглянутими конструкціями. Результати, наведені в даному розділі, опубліковано в таких працях: [7, 24].

3.1. Метрика на множині мультимножин

Визначимо норму $\|[x]\| := \|x\|$ на \mathcal{M}_X^+ . Оскільки початкова норма на X є симетричною функцією, визначена норма на \mathcal{M}_X^+ не залежить від представлення. Очевидно (див. [35]), що $\|[x] + [z]\| \leq \|[x]\| + \|[z]\|$ та $\|[\lambda x]\| = |\lambda| \|[x]\|$ для всіх $[x], [z] \in \mathcal{M}_X^+$ та $\lambda \in \mathbb{C}$.

Функція $\|[x]\|$ породжує метрику d на \mathcal{M}_X^+ :

$$d([x], [z]) = \|[x] \Delta [z]\|,$$

де $[x] \Delta [z] = ([x] \setminus [z]) \cup ([z] \setminus [x])$ — симетрична різниця. Тут ми розуміємо симетричну різницю, враховуючи кратності елементів.

Наприклад,

$$[(1, 1, 2, 2, 2, 3)] \Delta [(1, 2, 2, 2, 2, 2, 4)] = [(1, 2, 2, 3, 4)].$$

У роботах [14, 35] було введено норму на \mathcal{M}_X за такою формулою:

$$\|[[y][x]]\| := \sup\{\|y'\| + \|x'\| : [[y][x]] \approx [[y']][x']\}.$$

Ця норма породжує метрику на \mathcal{M}_X :

$$d([[y][x]], [[v][u]]) = \|[[y][x]] - [[v][u]]\|.$$

Ця метрика є узагальненням метрики \mathcal{M}_X^+ , оскільки

$$d([x], [z]) = \|[x] \Delta [z]\| = \|[[0][x]] - [[0][z]]\| = d([[0][x]], [[0][z]]).$$

Зазначимо, що метричний простір (\mathcal{M}_X, d) , наділений додатковими алгебраїчними операціями, для випадку $X = \ell_1$ було введено в [35] і далі досліджено в [13, 16]. Загальний випадок X розглядався в [14]. Зокрема, в [14] було доведено, що (\mathcal{M}_X, d) є повним, а отже, і (\mathcal{M}_X^+, d) як замкнена підмножина.

Позначимо через $(\mathcal{M}_{X,0}, d)$ підмножину (\mathcal{M}_X, d) , що складається з елементів $[(y|x)] = [[y][x]]$ таких, що існують елементи $y' \in [y]$ і $x' \in [x]$, які є скінченними. Очевидно, $(\mathcal{M}_{X,0}, d)$ є підгрупою (\mathcal{M}_X, d) . Також позначимо

$$(\mathcal{M}_{X,0}^+, d) = (\mathcal{M}_X^+, d) \cap (\mathcal{M}_{X,0}, d).$$

Елементи \mathcal{M}_X допускають множення на константу $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\mathbb{C} \times \mathcal{M}_X \ni (\lambda, [(y|x)]) \mapsto \lambda[(y|x)] := [(\lambda y | \lambda x)] \in \mathcal{M}_X.$$

Найважливіші результати, які можна отримати щодо (\mathcal{M}_X, d) за допомогою [14, 35], зібрані в наступній теоремі.

Теорема 3.1. (див. [14]).

(i) (\mathcal{M}_X, d) є повним метричним простором.

(ii) Операція додавання є неперервною у метриці d .

(iii) Множення на константу є розривним, але $\lambda[(y|x)] \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, для будь-якого фіксованого $[(y|x)]$.

(iv) Метричний простір (\mathcal{M}_X, d) є несепарабельним.

(v) $(\mathcal{M}_{X,0}^+, d)$ є щільною підмножиною в (\mathcal{M}_X, d) .

Доведення. Пункти (i) та (ii) доведено у [14]. Щоб довести (iii) та (iv), зауважимо, що для кожного $\varepsilon > 0$ і $[(y|x)] \neq 0$,

$$d(\lambda[(y|x)], (\lambda + \varepsilon)[(y|x)]) = 2\lambda + \varepsilon\lambda \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, якщо $\lambda \neq 0$. Отже, операція множення на константу є розривною, а інтервал $\lambda[(y|x)]$, $0 < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ є незліченною ніде не щільною множиною. З іншого боку, $\|\lambda[(y|x)]\| = |\lambda| \|[(y|x)]\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$.

Щоб довести (v), зауважимо, що для будь-яких елементів $x \in [x]$ і $y \in [y]$, а також натуральних чисел n і m ,

$$\begin{aligned} & \|[(y|x)] - [(\dots, 0, y_m, \dots, y_1 | x_1, \dots, x_n, 0, \dots)]\| \\ &= \|[(\dots, y_{m+k}, \dots, y_{m+1} | x_{n+1}, \dots, x_{n+k}, \dots)]\| \\ &\leq \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} y_k e_k \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k e_k \right\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\min\{n, m\} \rightarrow \infty$. □

Зауважимо, що множення на фіксовану константу λ визначене як $[(y|x)] \mapsto \lambda[(y|x)]$ є очевидно неперервним відносно $[(y|x)]$.

Будь-яку функцію g на \mathcal{M}_X (або на \mathcal{M}_X^+) можна продовжити до функції \check{g} на $X \times X$ (або на X) за допомогою $\check{g}(y|x) = g([(y|x)])$ (або $\check{g}(x) = g([x])$ відповідно). Кажуть, що функція f на $X \times X$ (або на X) є суперсиметричною (тобто симетричною), якщо існує функція g на \mathcal{M}_X (відповідно, на \mathcal{M}_X^+) така, що $f(y|x) = g([(y|x)])$ (відповідно, $f(x) = g([x])$).

Твердження 3.1. Нехай $[x^{(m)}]$ — послідовність у \mathcal{M}_X^+ , яка збігається до елемента $[x^{(0)}]$. Тоді $[x^{(m)}]$ має вигляд

$$[x^{(m)}] = [(x_1^{(m)}, z_1^{(m)}, x_2^{(m)}, z_2^{(m)}, \dots)],$$

де $[z^{(m)}] = [(z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \dots)] \rightarrow [0]$ при $m \rightarrow \infty$.

Доведення. Очевидно, що $[x^{(m)}] - [x^{(0)}] =: [z^{(m)}] \rightarrow [0]$ при $m \rightarrow \infty$, отже, $z^{(m)}$ є таким, як потрібно. \square

Теорема 3.2. Фактор-відображення $x \mapsto [x]$ є відкритим, але воно є розривним у будь-якій точці X , окрім 0 .

Доведення. Відкрита куля радіуса r у X з центром в точці x_0 , містить, зокрема, всі точки вигляду $x_0 + z$, такі що $\text{supp}(x_0) \cap \text{supp}(z) = \emptyset$ і $\|z\| < r$. Але для цього випадку, $[x_0 + z] = [x_0] + [z]$, і множина $\{[x_0] + [z] : \|[z]\| < r\}$ є точно відкритою кулею радіуса r з центром в $[x_0] \in \mathcal{M}_X^+$. Таким чином, образ будь-якої відкритої кулі в X під фактор-відображенням містить відкриту кулю в \mathcal{M}_X^+ і, отже, є відкритим.

Нехай $x \in X$ і $x \neq 0$. Виберемо послідовність $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ таку, що $|x_k^{(n)} - x_k| < 1/2^{n+k}$ та $x_k^{(n)} \neq x_j$ для будь-яких індексів k та j . Тоді

$$\|x - x^{(n)}\| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

З іншого боку,

$$d(x, x^{(n)}) = \left\| [(x^{(n)} | x)] \right\| = \|x\| + \|x^{(n)}\| > \|x\| > 0.$$

Таким чином, фактор-відображення є розривним у x .

Відповідно до визначення d , послідовність $x^{(m)} \in X$ прямує до 0 тоді і тільки тоді, коли $\|[x^{(m)}]\| = \|x^{(m)}\|$ прямує до 0 , тобто $[x^{(m)}] \rightarrow [0]$ в \mathcal{M}_X^+ . Таким чином, відображення $x \mapsto [x]$ є неперервним у 0 . \square

Наслідок 3.1. Якщо симетрична функція f на X є неперервною, тоді $\hat{f}: [x] \rightarrow f(x)$ є неперервною на \mathcal{M}_X^+ .

Симетрична функція f на X є неперервною в нулі тоді і тільки тоді, коли \hat{f} є неперервною в точці $[0]$.

Приклад 3.1. Нехай $X = \ell_1$ і χ — характеристична функція відкритого одиничного диска $D \subset \mathbb{C}$, тобто $\chi(t) = 1$ при $|t| < 1$ і $\chi(t) = 0$ при $|t| \geq 1$. Визначимо

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi(x_n), \quad x \in \ell_1.$$

Очевидно, що g є симетричною та розривною функцією. Проте \hat{g} є неперервною на \mathcal{M}_X^+ . Дійсно, нехай $[x^{(m)}] \rightarrow [x]$ при $m \rightarrow \infty$. Достатньо перевірити випадок, коли $g(x^{(m)}) \not\rightarrow g(x)$. Для всіх координат $x_i^{(m)}$ векторів $x^{(m)}$ виконується $|x_i^{(m)}| < 1$, але існує координата x_j такого, що $|x_j| \geq 1$, тоді $d([x^{(m)}], [x]) \geq |x_j| \geq 1$. Отже, у цьому випадку $[x^{(m)}] \not\rightarrow [x]$. Очевидно, що для інших випадків маємо збіжність.

Наприклад, якщо абсолютні значення всіх координат x менші за 1, тоді $\hat{g}(x^{(m)}) = x^{(m)} \rightarrow x = \hat{g}(x)$ при $m \rightarrow \infty$. Таким чином, \hat{g} є неперервною, тоді як g — ні.

Наступний приклад показує, що збіжність $x^{(m)}$ в X не означає збіжність $[x^{(m)}]$ у \mathcal{M}_X^+ .

Приклад 3.2. Множина комплексних чисел може бути природно вкладена в \mathcal{M}_X^+ за допомогою

$$\mathbb{C} \ni \lambda \rightsquigarrow [\lambda] = \lambda[e_1] \in \mathcal{M}_X^+.$$

Але

$$d(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} |\lambda_1| + |\lambda_2|, & \text{якщо } \lambda_1 \neq \lambda_2, \\ 0, & \text{якщо } \lambda_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

Іншими словами, обмеження метрики d на область визначення будь-якої замкненої підмножини \mathbb{C} , яка не містить нуля, породжує дискретну топологію. Зокрема, якщо λ_n збігається до $\lambda \neq 0$ у \mathbb{C} і $\lambda_n \neq \lambda$ для всіх n , то $\lambda_n e_1$ збігається до λe_1 у X , але $[\lambda_n]$ не збігається до $[\lambda]$ у \mathcal{M}_X^+ .

Можна помітити, що топологія, породжена метрикою d , виглядає надто сильною. Введемо іншу метрику на \mathcal{M}_X , яка породжує слабшу тополо-

гію. Відображення f з метричного простору (X, ρ_1) у метричний простір (Y, ρ_2) називається *ліпшицевим*, якщо його константа Ліпшиця

$$L(f) = \sup_{x, z \in X} \frac{\rho_2(f(x), f(z))}{\rho_1(x, z)}$$

є скінченною. Якщо $L(f) \leq 1$, то f називається *нерозширювальним*. Згідно з [51, с. 10-13], справедлива наступна теорема:

Теорема 3.3. *Нехай (X, ρ_0) — повний метричний простір, а “ \sim ” — відношення еквівалентності на X . Тоді наступна функція на $(X/\sim) \times (X/\sim)$,*

$$\rho([x], [z]) = \inf\{\rho_0(x', q_1) + \rho_0(q_1', q_2) + \dots + \rho_0(q_{n-1}', z') : x \sim x', z \sim z', q_j \sim q_j'\}$$

є псевдометрикою, і

$$\rho([x], [z]) = \sup|f(x) - f(z)|,$$

де f пробігає множину дійснозначних нерозширювальних функцій на X таких, що $f(x) = f(y)$, якщо $x \sim y$. Більш того, якщо існує послідовність нерозширювальних функцій $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $x \sim z$, тоді і тільки тоді, коли $f_k(x) = f_k(z)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то ρ є метрикою.

Наслідок 3.2. *Функція $\rho(\cdot, \cdot)$, визначена як*

$$\rho([u], [v]) = \inf\{\|u' - q_1\| + \|q_1' - q_2\| + \dots + \|q_{n-1}' - v'\| : u \approx u', v \approx v', q_j \approx q_j'\},$$

є псевдометрикою на \mathcal{M}_X , і вона є метрикою, якщо $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$, де $\|u\| = \|x\| + \|y\|$, $u = (x|y)$ — стандартна норма в $X \times X$.

Доведення. Застосовуючи теорему 3.3 до $\rho_0(u, v) = \|u - v\|$, $u, v \in X \times X$ та до відношення еквівалентності “ \approx ”, функція $\rho(\cdot, \cdot)$ є псевдометрикою на \mathcal{M}_X . Нехай $X = \ell_p$ для деякого $1 \leq p < \infty$. Ми стверджуємо, що многочлени

$$T_k(u) = T_k(y|x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^k - \sum_{j=1}^{\infty} y_j^k$$

задовольняють умову $u \approx v$, тоді і тільки тоді, коли $T_k(u) = T_k(v)$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, $k \geq [p]$, де $[p]$ — це ціла частина p . Справді, в [1] доведено, що $x \sim y$ в ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, тоді і тільки тоді, якщо

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j^k = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^k,$$

тобто $T_k(y|x) = 0$ для всіх $k \geq m \geq [p]$. Отже, $[(y|x)] = [0]$, тоді і тільки тоді, коли $x \sim y$, що еквівалентно $T_k(y|x) = 0$ для всіх $k \geq m \geq [p]$. Нехай тепер $u = (y|x)$, $v = (d|b)$, і $T_k(u) = T_k(v)$ для всіх $k \geq m \geq [p]$. Тоді

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j^k - \sum_{j=1}^{\infty} y_j^k = \sum_{j=1}^{\infty} b_j^k - \sum_{j=1}^{\infty} d_j^k$$

і, отже, $T_k(y \bullet b | x \bullet d) = 0$. Таким чином, $[[y] - [b] | [x] - [d]] = [(y|x)] - [(d|b)] = [0]$, тобто $u \approx v$.

Зауважимо, що для $k \geq [p]$ та $u = (y|x)$ з $\|u\| \leq 1$ ми маємо

$$|T_k(u)|^{1/k} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^k| + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j^k| \right)^{1/k} \leq (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p} \leq \|u\|.$$

Визначимо $f_k(u) := |T_k(u)|^{1/k}$. Оскільки функція $u \mapsto \|u\|$ не збільшує норму, а також $|T_k(u)|^{1/k} \leq \|u\|$, послідовність f_k є такою, як потрібно у теоремі 3.3. Отже, ρ є метрикою. \square

Для загального випадку X кількість симетричних многочленів може бути недостатньою. Наприклад, c_0 не допускає жодного неконстантного симетричного полінома. Проте існують інші нерозширювальні симетричні функції на X . Розглянемо наступний лінійний порядок “ \prec ” на множині комплексних чисел \mathbb{C} . Нехай $a = |a|(\cos \theta_a + i \sin \theta_a)$ і $b = |b|(\cos \theta_b + i \sin \theta_b)$ — комплексні числа. Припустимо, що θ_a та θ_b належать інтервалу $[0, 2\pi)$. Якщо $|a| \neq |b|$, то вважаємо, що $a \prec b$, якщо $|a| < |b|$. Якщо $|a| = |b|$, то $a \prec b$, тоді і тільки тоді, коли $\theta_a < \theta_b$. Очевидно, що “ \prec ” є лінійним порядком і будь-яка скінченна множина комплексних чисел має максимальний

і мінімальний елемент відносно цього порядку. Для заданої підмножини K комплексних чисел позначимо через $Max(K)$ максимальний елемент у K (якщо він існує) відносно “ \prec ”. Позначимо $[u] = [(y|x)] \in \mathcal{M}_X$ і припустимо, що $(y|x)$ є незвідним представленням $[u]$. Визначимо: $m_1^+([u]) = Max_n(x_n)$, $m_1^-([u]) = Max_n(y_n)$. Якщо $m_1^+([u])$ і $m_1^-([u])$ визначені, то

$$\begin{aligned} m_{k+1}^+([u]) &= m_1^+([u] - [0|m_1^+([u]), m_2^+([u]), \dots, m_k^+([u])]) \\ &= Max\{[x] \setminus \{m_1^+([u]), m_2^+([u]), \dots, m_k^+([u])\}\}, \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} m_{k+1}^-([u]) &= m_1^-([u] - [m_1^-([u]), m_2^-([u]), \dots, m_k^-([u])|0]) \\ &= Max\{[y] \setminus \{m_1^-([u]), m_2^-([u]), \dots, m_k^-([u])\}\}. \end{aligned}$$

Іншими словами, двостороння послідовність

$$(\dots, m_k^-([u]), \dots, m_2^-([u]), m_1^-([u])|m_1^+([u]), m_2^+([u]), \dots, m_k^+([u]))$$

є перестановкою елементів множини

$$(\dots, y_k, \dots, y_2, y_1|x_1, x_2, \dots, x_k, \dots),$$

таким чином, $m_1^+([u]) \succ m_2^+([u]) \succ \dots$ і $m_1^-([u]) \succ m_2^-([u]) \succ \dots$. Отже, $[u] = [v]$, тоді і тільки тоді, коли $m_k^\pm([u]) = m_k^\pm([v])$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Оскільки X має симетричний базис і симетричну норму, така перестановка виконується у $X \times X$ і зберігає норму. Також легко перевірити, що $\|m_k\| = 1$. Проте функція $u \mapsto m_k^\pm([u])$ не є нерозширювальною і навіть не є неперервною. Таким чином, ми не можемо застосувати теорему 3.3 і не відомо, чи є ρ метрикою в загальному випадку \mathcal{M}_X . Нехай \mathcal{M}_X^\pm буде наступною підмножиною \mathcal{M}_X :

$$\mathcal{M}_X^\pm = \{[u] = [(y|x)] \in \mathcal{M}_X : x_i \geq 0, \quad y_j \leq 0, \quad i, j \in \mathbb{N}\}.$$

Очевидно, що \mathcal{M}_X^\pm є напівгрупою, але не групою. У [40] було доведено, що обмеження функцій $u \mapsto m_k^+[u]$ і $u \mapsto m_k^-[u]$ на метричний підпростір

$$\{(y, x) \in X \times X : x_i \geq 0, \quad y_j \leq 0, \quad i, j \in \mathbb{N}\}$$

є Лівшицевою функцією з Лівшицевою сталою, що дорівнює 1. Таким чином, маємо наступне твердження.

Наслідок 3.3. *Обмеження псевдовметрики ρ на \mathcal{M}_X^\pm є метрикою.*

Доведення. Достатньо взяти $f_{2k} = m_k^+$ та $f_{2k-1} = m_k^-$ і застосувати теорему 3.3. □

Твердження 3.2. *Функції $m_k^+[u]$ та $m_k^-[u]$ є неперервними на метричному просторі (\mathcal{M}_X, d) .*

Доведення. Нехай $[u] = [(y|x)]$. Тоді $m_k^+[u] \leq \|x\| \leq \|[u]\|$ та $m_k^-[u] \leq \|y\| \leq \|[u]\|$. Отже, якщо $\|[u]\| \rightarrow 0$, то обидві $m_k^+[u]$ і $m_k^-[u]$ прямують до нуля для кожного k . □

Твердження 3.3. *Відображення $u \mapsto [u]$ є неперервним як відображення з $X \times X$ до (\mathcal{M}_X, ρ) .*

Доведення. За означенням ρ , $\rho([u], [v]) \leq \|u - v\|$. Тому, якщо $u_n \rightarrow v$ в $X \times X$ при $n \rightarrow \infty$, то $[u_n] \rightarrow [v]$ в (\mathcal{M}_X, ρ) при $n \rightarrow \infty$, і отже, відображення $u \mapsto [u]$ є неперервним. □

Твердження 3.4. *Операція додавання $([u], [v]) \mapsto [u] + [v]$ є неперервною в (\mathcal{M}_X, ρ) .*

Доведення. Нехай $[z], [w]$ у \mathcal{M}_X та $\mu \in \mathbb{C}$ такі, що $\rho([u], [z]) < \varepsilon/2$ і $\rho([v], [w]) < \varepsilon/2$. Тоді для деяких $n, m \in \mathbb{N}$ існують q_1, \dots, q_{n-1} і s_1, \dots, s_{m-1} у \mathcal{M}_X такі, що

$$\|u' - q_1\| + \|q'_1 - q_2\| + \dots + \|q'_{n-1} - z'\| < \varepsilon/2,$$

де $u \approx u'$, $z \approx z'$, і $q_j \approx q'_j$, а також

$$\|v' - s_1\| + \|s'_1 - s_2\| + \dots + \|s'_{m-1} - w'\| < \varepsilon/2,$$

де $v \approx v'$, $w \approx w'$ і $s_j \approx s'_j$. Отже,

$$\begin{aligned} \rho([u] + [v], [z] + [w]) &\leq \|u' + v' - q_1 - s_1\| + \|q'_1 + s'_1 - q_2 - s_2\| + \dots \\ &\quad + \|q'_{n-1} + s'_{n-1} - z' - w'\| \leq \|u' - q_1\| + \|q'_1 - q_2\| + \dots \\ &\quad + \|q'_{n-1} - z'\| + \|v' - s_1\| + \|s'_1 - s_2\| + \dots + \|s'_{m-1} - w'\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже, якщо $[z]$ прямує до $[u]$, а $[w]$ прямує до $[v]$, тоді $[z] + [w]$ прямує до $[u] + [v]$. Тобто, додавання є неперервним. \square

Лема 3.1. Для будь-яких $[u]$ і $[v]$ у \mathcal{M}_X існують елементи $\tilde{u} \approx u$ і $\tilde{v} \approx v$ такі, що $d([u], [v]) = \|\tilde{u} - \tilde{v}\|$.

Доведення. Нехай $u = (y|x) = (\dots, y_2, y_1|x_1, x_2, \dots)$ та $v = (d|b) = (\dots, d_2, d_1|b_1, b_2, \dots)$ без обмеження, в загальному можемо вважати, що елементи $(y|x)$ та $(d|b)$ є нескоротними. Тоді маємо

$$\tilde{u} = (\dots, y_3, 0, y_2, 0, y_1|x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots)$$

та $\tilde{v} = (\dots, \tilde{d}_2, \tilde{d}_1|\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots)$, причому $b_k = \tilde{b}_{\sigma(k)}$, $d_j = \tilde{d}_{\mu(j)}$, де μ та σ — ін'єкції з \mathbb{N} у себе, задані наступним чином. Якщо $b_1 = x_k$, тоді $\sigma(1) = k$; якщо $b_1 \neq x_k$ для жодного $k \in \mathbb{N}$, тоді $\sigma(1) = 2$; якщо $d_1 = y_j$, тоді $\mu(1) = j$; якщо $d_1 \neq y_j$ для жодного $j \in \mathbb{N}$, тоді $\mu(1) = 2$. Припустимо, що $\sigma(n)$ та $\mu(n)$ визначені. Якщо $b_{n+1} = x_k$ для деякого $k \notin \mathbb{N} \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}$, тоді $\sigma(n+1) = 2k - 1$, інакше $\sigma(n+1) = 2n$; якщо $d_{n+1} = y_j$ для деякого $j \notin \mathbb{N} \setminus \{\mu(1), \dots, \mu(n)\}$, тоді $\mu(n+1) = 2j - 1$, інакше $\mu(n+1) = 2n$. Таким чином, ми побудували ін'єктивні (але не обов'язково сюр'єктивні) відображення μ та σ . Також визначаємо $\tilde{b}_k = 0$ та $\tilde{d}_j = 0$ для всіх k та j , що не належать до області значень σ та μ відповідно. Наприклад, якщо $u = (\dots, 0, -1, 3, 2|1, 1, 4, -5, 0, \dots)$ та $v = (\dots, 0, 2, 3|1, 6, 0, \dots)$, тоді $\tilde{u} = (\dots, 0, -1, 0, 3, 0, 2|1, 0, 1, 0, 4, 0, -5, \dots)$ та $\tilde{v} = (\dots, 0, 3, 0, 2|1, 6, 0, \dots)$.

Отже, можна побачити, що для таких представників \tilde{u} і \tilde{v} , $d([u], [v]) = \|\tilde{u} - \tilde{v}\|$. \square

Наслідок 3.4. Топологія, породжена ρ на \mathcal{M}_X , є слабшою за топологію, породжену d .

Доведення. За визначенням ρ та леми 3.1,

$$\rho([u], [v]) \leq \|\tilde{u} - \tilde{v}\| = d([u], [v]).$$

Отже, ρ є неперервною в (\mathcal{M}_X, d) , і тому топологія, породжена ρ , є слабшою за топологію, породжену d . \square

Легко перевірити, що у випадку, коли ρ є метрикою, (\mathcal{M}_X, ρ) є сепарбельним метричним простором. Ми не знаємо, чи є фактор-відображення відкритим у топології ρ , але з теореми 3.3 випливає, що для кожної ліпшицевої суперсиметричної функції f на $X \times X$ функція $([y|x]) \mapsto f(y, x)$ є неперервною на (\mathcal{M}_X, ρ) . Також ми не знаємо, чи є (\mathcal{M}_X, ρ) повним простором.

3.2. Метрика на множині впорядкованих мультимножин

Визначимо наступне відношення еквівалентності на X : кажемо, що $x \simeq y$, якщо існує бієкція $\sigma: \text{supp}(x) \rightarrow \text{supp}(y)$ така, що $\sigma(i) < \sigma(j)$, коли $i < j$ та $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i \in \text{supp}(x)$. Очевидно, $x \simeq y$ тоді і тільки тоді, коли існують τ_1 та τ_2 в $\overline{\mathfrak{S}}$ такі, що $\tau_1(x) = \tau_2(y)$. Нехай $[x]$ – клас еквівалентності, що містить x . Визначимо *канонічного* представника $[x]$ як

$$\widehat{x} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}, 0, 0, \dots) \in X,$$

де $i_1, i_2, \dots, i_m \in \text{supp}(x)$ та $1 \leq m \leq \infty$. Іншими словами, або всі координати \widehat{x}_i вектора \widehat{x} ненульові, або якщо $\widehat{x}_i = 0$, тоді $\widehat{x}_j = 0$ для кожного $j > i$. Легко перевірити, що канонічний представник завжди існує та є єдиним. Для заданого $x \in X$, \widehat{x} можна отримати, вилучивши всі нульові координати x_i для $i < M$, де M – максимальне число таке, що $x_M \neq 0$, або $M = \infty$, якщо x має нескінченно багато ненульових координат.

Легко бачити, що $f(x) = f(\widehat{x})$ для кожної субсиметричної функції f та $x \in X$. Навпаки, якщо f_0 – функція на фактор-множині X/\simeq , то можна визначити субсиметричну функцію f на X за допомогою $f(x) = f_0(\widehat{x})$, $x \in X$.

Наступне твердження показує, що відображення $x \mapsto \widehat{x}$ є розривним в X .

Твердження 3.5. *Відображення $w: x \mapsto \widehat{x}$, що діє з X в X є розривним у будь-якій точці x вигляду $x = (0, x_2, \dots, x_m, 0, \dots)$, де $x_i \neq 0$, $2 \leq i \leq m \leq \infty$.*

Доведення. Нехай $x^{(n)} = (\varepsilon_n, x_2, \dots, x_m, 0, \dots)$ – послідовність векторів в X , така що $\varepsilon_n \neq 0$ та $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Оскільки $w(x^{(n)}) = (\varepsilon_n, x_2, \dots, x_m, 0, \dots)$ та $w(x) = (x_2, x_3, \dots, x_m, 0, \dots)$, маємо

$$\|x^{(n)} - x\| = |\varepsilon_n| \rightarrow 0,$$

тобто $x^{(n)} \rightarrow x$. З іншого боку,

$$w(x^{(n)}) - w(x) = (\varepsilon_n - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_m, 0, \dots).$$

Таким чином,

$$\|w(x^{(n)}) - w(x)\| \geq |x_2| > 0$$

і тому $w(x^{(n)}) \not\rightarrow w(x)$. Отже, відображення w є розривним в точці x . \square

Позначимо через \mathfrak{M}_X фактор-множину X/\simeq . Множину \mathfrak{M}_X можна розглядати як множину впорядкованих мультимножин ненульових чисел (ненульових координат векторів $x \in X$). Введемо таку метрику d на \mathfrak{M}_X

$$d([x], [y]) = \|\hat{x} - \hat{y}\|, \quad x, y \in X.$$

Лема 3.2. *Функція d є метрикою на \mathfrak{M}_X .*

Доведення. Нехай $x \simeq x'$ та $y \simeq y'$. Оскільки кожен клас еквівалентності $[x]$ має єдиного представника \hat{x} , то

$$\hat{x} = \hat{x}', \quad \text{and} \quad \hat{y} = \hat{y}'.$$

Отже,

$$\|\hat{x} - \hat{y}\| = \|\hat{x}' - \hat{y}'\|$$

і тому відстань d є коректно визначеною на \mathfrak{M}_X .

Оскільки $\|\cdot\|$ є нормою на X , то

$$d([x], [y]) = \|\hat{x} - \hat{y}\| \geq 0$$

для всіх $[x], [y] \in \mathfrak{M}_X$. Також

$$d([x], [y]) = 0 \iff \|\hat{x} - \hat{y}\| = 0 \iff \hat{x} = \hat{y} \iff x \simeq y \iff [x] = [y].$$

Для будь-яких $[x], [y] \in \mathfrak{M}_X$ отримаємо

$$d([x], [y]) = \|\hat{x} - \hat{y}\| = \|\hat{y} - \hat{x}\| = d([y], [x]).$$

Перевіримо нерівність трикутника. Якщо $[x], [y], [z] \in \mathfrak{M}_X$, то

$$\hat{x} - \hat{z} = (\hat{x} - \hat{y}) + (\hat{y} - \hat{z}),$$

і за нерівністю трикутника для норми $\|\cdot\|$ маємо

$$\|\hat{x} - \hat{z}\| = \|\hat{x} - \hat{y} + \hat{y} - \hat{z}\| \leq \|\hat{x} - \hat{y}\| + \|\hat{y} - \hat{z}\|.$$

Отже,

$$d([x], [z]) \leq d([x], [y]) + d([y], [z]).$$

□

Відомо, що кожен метричний простір M є цілком гаусдорфовим, тобто для кожних u та v в M , де $u \neq v$, існує неперервна функція f на M така, що $f(u) \neq f(v)$. Нехай $C(M)$ – алгебра всіх неперервних функцій на M з топологією поточної збіжності. Іншими словами, топологія $C(M)$ є найслабшою топологією, відносно якої всі функціонали $\delta_u: u \mapsto u(x)$ є неперервними. Отже, якщо $M = \mathfrak{M}_X$, то $x \simeq y$ тоді і тільки тоді, коли $\delta_x = \delta_y$. У [7] було зауважено, що для $X = \ell_p$, $x \simeq y$ тоді і тільки тоді, коли $f(x) = f(y)$ для кожного $f \in H_{b\mathfrak{S}}(\ell_p)$.

Твердження 3.6. *Кожна неперервна функція f на (\mathfrak{M}_X, d) індукує неперервну субсиметричну функцію \tilde{f} на X , поклавши $\tilde{f}(x) = f([x])$. Якщо f є обмеженою на обмежених підмножинах \mathfrak{M}_X , тоді \tilde{f} є обмеженою на обмежених підмножинах X .*

Доведення. Очевидно, \tilde{f} є субсиметричною. Якщо f неперервна, то $[x_n] \rightarrow [x_0]$ впливає, що $f([x_n]) \rightarrow f([x_0])$ (при $n \rightarrow \infty$). Але $\tilde{f}(x_n) = f([x_n])$ та $\tilde{f}(x_0) = f([x_0])$. Таким чином, \tilde{f} є неперервною.

Якщо $U \subset X$ – обмежена підмножина і $[U] = \{[x]: x \in U\}$, тоді $[U]$ є обмеженою. Тому, якщо \tilde{f} необмежена на U , то f має бути необмеженою на $[U]$. Звідси впливає, що \tilde{f} є обмеженою на кожній обмеженій підмножині X , якщо f є обмеженою на обмежених підмножинах \mathfrak{M}_X . □

Наступна теорема показує, що простір (\mathfrak{M}_X, d) у нескінченновимірному випадку не є повним, а також дає опис його поповнення (з точністю до ізометрії).

Теорема 3.4. *Метричний простір (\mathfrak{M}_X, d) не є повним для жодного нескінченновимірною банахового простору X із субсиметричним базисом. Поповнення простору (\mathfrak{M}_X, d) ізометричне простору X , розглянутого з метрикою, породженою нормою простору X .*

Доведення. Нехай $\widehat{I}: [x] \mapsto \widehat{x} \in X$ – природне вкладення \mathfrak{M}_X в X та $\widehat{X} = \widehat{I}(\mathfrak{M}_X)$. Тоді \widehat{I} є ізометрією, а \widehat{X} є щільною множиною в X . Справді, для довільного вектора $x = (x_1, x_2, \dots) \neq 0$ в X розглянемо послідовність векторів $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ таку, що

$$x_j^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+j}} & \text{if } j \notin \text{supp}(x), \\ x_j & \text{if } j \in \text{supp}(x). \end{cases}$$

Очевидно, що $x^{(n)} \rightarrow x$ в X при $n \rightarrow \infty$, причому $x^{(n)} = \widehat{x^{(n)}}$ для кожного n .

Оскільки X є повним, то він є поповненням \widehat{X} . Отже, X ізометричний поповненню (\mathfrak{M}_X, d) , а тому, зважаючи на $\widehat{X} \neq X$, метричний простір (\mathfrak{M}_X, d) не є повним. \square

3.3. Оператор лівого зсуву у просторі мультимножин

Позначимо через ℓ_1^+ підмножину всіх $x \in \ell_1$ таких, що всі координати x_k числа x є невід'ємними. Також позначимо через \mathcal{R}_X^+ таку підмножину в \mathcal{M}_X :

$$\mathcal{R}_X^+ = \{[x] \in \mathcal{M}_X^+ : x \in \ell_1^+\}.$$

Очевидно, (\mathcal{R}_X^+, d) є метричною напівгрупою.

Для кожного $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_1^+$ позначимо $M(x) = [(\max_i x_i, 0, 0, \dots)] = [(m_1([x]), 0, 0, \dots)]$. Для заданого $\lambda > 1$ визначаємо наступне відображення $\mathfrak{T}_\lambda : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$:

$$\mathfrak{T}_\lambda([x]) = \lambda([x] - M(x)).$$

Іншими словами, \mathfrak{T}_λ занулює максимальну координату x і домножує результат на λ . Легко перевірити, що \mathfrak{T}_λ є неперервним у (\mathcal{R}_X^+, d) . Зауважимо, що \mathfrak{T}_λ не є адитивним.

Приклад 3.3.

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_\lambda([(1, 2, 2)] + [(1, 2, 3)]) &= \lambda[(1, 1, 2, 2, 2)] \\ &\neq \lambda[(1, 1, 2, 2)] = \mathfrak{T}_\lambda([(1, 2, 2)]) + \mathfrak{T}_\lambda([(1, 2, 3)]). \end{aligned}$$

Теорема 3.5. *Оператор \mathfrak{T}_λ є топологічно транзитивним на (\mathcal{R}_+^X, d) для кожного $\lambda > 1$.*

Доведення. Нехай \mathcal{R}_0 — підмножина \mathcal{R}_+ , яка складається з усіх елементів $[x]$, таких що лише скінченна кількість координат x не дорівнює нулю. Зауважимо, що \mathcal{R}_0 є щільною підмножиною в (\mathcal{R}_+^X, d) . Визначимо відображення $S : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$ за формулою:

$$S([y]) = \frac{1}{\lambda}(M(y) + [y]).$$

Зауважимо, що

$$\|S^n([y])\| \leq \frac{(n+1)\|y\|}{\lambda^n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

для кожного $[y] \in \mathcal{R}_+^X$.

Нехай U і V — відкриті підмножини в (\mathcal{R}_+^X, d) , $[x] \in U \cap \mathcal{R}_0$ та $[y] \in V$. Припустимо, що $x = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots)$, $x_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Виберемо ціле число k таке, що:

1. $S^k([y]) + [x] \in U$;
2. $m_1(S^k([y])) < x_j$, $j = 1, \dots, m$.

Нехай

$$[z] = \frac{S^k([y])}{\lambda^m} + [x].$$

Оскільки $S^k([y]) + [x] \in U$, то $[z] \in U$ також. Обчислимо $\mathfrak{T}_\lambda^{k+m}([z])$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_\lambda^{k+m}([z]) &= \mathfrak{T}_\lambda^{k+m} \left[\left(x_1, \dots, x_m, \frac{m_1([y])}{\lambda^{m+k}}, \dots, \frac{m_1([y])}{\lambda^{m+k}}, \frac{y_1}{\lambda^{m+k}}, \frac{y_2}{\lambda^{m+k}}, \dots \right) \right] \\ &= \mathfrak{T}_\lambda^k \left[\left(\frac{m_1([y])}{\lambda^k}, \dots, \frac{m_1([y])}{\lambda^k}, \frac{y_1}{\lambda^k}, \frac{y_2}{\lambda^k}, \dots \right) \right] = [y]. \end{aligned}$$

Таким чином, ми знайшли $[z] \in U$ таке, що $\mathfrak{T}_\lambda^{k+m}([z]) = [y] \in V$. Отже, \mathfrak{T}_λ є топологічно транзитивним. \square

Зауважимо, що доведення теореми 3.5 залишається справедливим, якщо замінити топологію простору (\mathcal{R}_+^X, d) на будь-яку метризовну топологію напівгрупи, за якої \mathfrak{T}_λ є неперервним, \mathcal{R}_0 щільна в \mathcal{R}_+^X , і $S^n([y]) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Наслідок 3.5. \mathfrak{T}_λ є топологічно транзитивним (і, отже, гіперциклічним) на метричному просторі (\mathcal{R}_+^X, ρ) .

Наступну теорему можна розглядати як аналог критерію топологічної транзитивності (див. [6, р. 4,5]) для метричних напівгруп.

Теорема 3.6. *Нехай Q — метрична напівгрупа, а T — відображення з Q в себе. Припустимо, що існують щільна підмножина $\Omega \subset Q$ і $\Xi \in Q$, і для кожного $u \in \Omega$ існує число $t \in \mathbb{N}$ та послідовність відображень $S_{u,k}: \Xi \rightarrow Q$, $k \in \mathbb{N}$ такі, що виконуються умови:*

- (i) $S_{u,k}(v) \rightarrow 0$ для кожного $v \in \Xi$ при $k \rightarrow \infty$;
- (ii) для кожного $u \in \Omega$, $T^{k+m}[S_{u,k}(v) + u] \rightarrow v$ для кожного $u \in \Omega$ при $k \rightarrow \infty$.

Тоді T є топологічно транзитивним.

Доведення. Нехай U та V — відкриті та непорожні підмножини Q . Виберемо $u \in U \cap \Omega$, $v \in V \cap \Xi$. Тоді існує k' , таке що $S_{u,k}(v) + u \in U$ для $k > k'$. Згідно з умовою (ii), існує k'' , таке що $T^{k+m}[S_{u,k}(v) + u] \in V$ для $k > k''$. Отже, для $k > \max(k', k'')$ маємо, що T^{k+m} відображає точку $S_{u,k}(v) + u \in U$ в V . Таким чином, T є топологічно транзитивним. \square

Розширимо оператор \mathfrak{T}_λ на \mathcal{M}_X^\pm наступним чином: перш за все, визначимо

$$M([u]) = \begin{cases} [(0 \mid \max_i(x_i))], & \text{якщо } \max_i(x_i) \geq -\min_j(y_j); \\ [(\min_j(y_j) \mid 0)], & \text{якщо } \max_i(x_i) < -\min_j(y_j), \end{cases}$$

де $(y|x)$ є нерозкладним представленням $[u]$. Тоді

$$\mathfrak{T}_\lambda([u]) = \lambda([u] - M([u])).$$

Теорема 3.7. \mathfrak{T}_λ є топологічно транзитивним у (\mathcal{M}_X^\pm, d) та гіперциклічним у $(\mathcal{M}_X^\pm, \rho)$, коли $|\lambda| > 1$.

Доведення. Нехай

$$S_{[u],k}([v]) = \frac{\overbrace{M([v]) + \cdots + M([v])}^k + [v]}{\lambda^{m([u])}},$$

де $m(u) = |\text{supp}(x)| + |\text{supp}(y)|$ — це сума кількостей координат $\text{supp}(x)$ та $\text{supp}(y)$. Також щільна підмножина $\Omega = \Xi = \mathcal{M}_0^\pm$ складається з таких елементів простору \mathcal{M}_X^\pm , незвідні представники яких мають лише скінченну кількість ненульових координат. Покажемо, що можемо застосувати теорему 3.6. Дійсно, оскільки $|\lambda| > 1$, то $\|S_{[u],k}([v])\| \leq \frac{k\|v\|}{\lambda^k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Нехай $[u] = [(y|x)]$ і $[v] = [(d|b)]$

належать \mathcal{M}_0^\pm і припустимо, що $\max_i(b_i) \geq -\min_j(d_j)$. Якщо k є достатньо великим, то $m_1(S_{[u],k}([v])) < \min_{i,j}\{|x_i|, |y_j|\}$, $i \in \text{supp}(x)$, $j \in \text{supp}(y)$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_\lambda^{k+m}(S_{[u],k}([v]) + [u]) &= \mathfrak{T}_\lambda^{k+m} \left[\left(y \bullet d \mid x \bullet \underbrace{\frac{m_1([b])}{\lambda^{m+k}}, \dots, \frac{m_1([b])}{\lambda^{m+k}}}_k, \frac{b_1}{\lambda^{m+k}}, \frac{b_2}{\lambda^{m+k}}, \dots \right) \right] \\ &= \mathfrak{T}_\lambda^k \circ \mathfrak{T}_\lambda^m \left[\left(y \bullet d \mid x \bullet \underbrace{\frac{m_1([b])}{\lambda^{m+k}}, \dots, \frac{m_1([b])}{\lambda^{m+k}}}_k, \frac{b_1}{\lambda^{m+k}}, \frac{b_2}{\lambda^{m+k}}, \dots \right) \right] \\ &= \mathfrak{T}_\lambda^k \left[\left(\dots, \frac{d_2}{\lambda^k}, \frac{d_1}{\lambda^k} \mid \underbrace{\frac{m_1([b])}{\lambda^k}, \dots, \frac{m_1([b])}{\lambda^k}}_k, \frac{b_1}{\lambda^k}, \frac{b_2}{\lambda^k}, \dots \right) \right] = [v]. \end{aligned}$$

де $m = m(u)$. За теоремою 3.6, \mathfrak{T}_λ є топологічно транзитивною в (\mathcal{M}_X^\pm, d) , і вона є гіперциклічною в $(\mathcal{M}_X^\pm, \rho)$, оскільки $(\mathcal{M}_X^\pm, \rho)$ є сепарабельним простором. \square

3.4. Оператор лівого зсуву у просторі впорядкованих мульти-множин

Нехай \mathfrak{M}_{00} – підмножина \mathfrak{M}_X , що складається з елементів $[x]$ таких, що $\text{supp}(x)$ є скінченною множиною для кожного $x \in [x]$. Очевидно, що $|\text{supp}(x)| = |\text{supp}(y)|$ для кожного $y \in [x]$. Таким чином, якщо $x \in \mathfrak{M}_{00}$, то можна записати $\widehat{x} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots)$ для деякого $m < \infty$. У цьому випадку будемо писати $\widehat{x} = (x_1, \dots, x_m)$, якщо $x_i \neq 0$, $i = 1, \dots, m$ та $\widehat{x} = \mathbf{0}$, якщо $x_i = 0$ для всіх $i \in \mathbb{N}$.

Нехай $[x], [y] \in \mathfrak{M}_{00}$ такі, що $\widehat{x} = (x_1, \dots, x_m)$ та $\widehat{y} = (y_1, \dots, y_j)$. Введемо таку алгебраїчну операцію на \mathfrak{M}_{00}

$$[x] \triangleleft [y] = [(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_j)].$$

Твердження 3.7. *Нехай $[x] \in \mathfrak{M}_{00}$, а $[y^{(n)}]$ – послідовність у \mathfrak{M}_{00} , що збігається до $\mathbf{0}$ в (\mathfrak{M}_{00}, d) при $n \rightarrow \infty$. Тоді*

$$[x] \triangleleft [y^{(n)}] \rightarrow x \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

тоді як

$$[y^{(n)}] \triangleleft [x] \not\rightarrow x \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

у загальному випадку.

Доведення. Нехай $\widehat{x} = (x_1, \dots, x_m)$, а $\widehat{y^{(n)}} = (y_1^{(n)}, \dots, y_{j(n)}^{(n)})$. Тоді

$$\begin{aligned} \|\widehat{x \triangleleft y^{(n)}} - \widehat{x}\| &= \|(x_1, \dots, x_m, y_1^{(n)}, \dots, y_{j(n)}^{(n)}) - (x_1, \dots, x_m)\| = \\ &= \|(y_1^{(n)}, \dots, y_{j(n)}^{(n)})\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. З іншого боку, неважко знайти $[x]$ та $[y^{(n)}]$ у \mathfrak{M}_{00} так, що

$$\|\widehat{y^{(n)} \triangleleft x} - \widehat{x}\| = \|(y_1^{(n)}, \dots, y_{j(n)}^{(n)}, x_1, \dots, x_m) - (x_1, \dots, x_m)\| \not\rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. □

Позначимо через B_λ зважений оператор лівого зсуву на X ,

$$B_\lambda: (x_1, \dots, x_n, \dots) \mapsto \lambda(x_2, \dots, x_n, \dots),$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$. Для заданого $\lambda \in \mathbb{C}$ визначимо $\tilde{B}_\lambda: \mathfrak{M}_X \rightarrow \mathfrak{M}_X$ за формулою

$$\tilde{B}_\lambda([x]) = B_\lambda(\hat{x}).$$

Зауважимо, що

$$d(\tilde{B}_\lambda([x]), \tilde{B}_\lambda([y])) \leq \lambda d([x], [y]),$$

і тому \tilde{B}_λ є неперервним на \mathfrak{M}_X .

Теорема 3.8. *Якщо $|\lambda| > 1$, то \tilde{B}_λ є топологічно транзитивним на \mathfrak{M}_X .*

Доведення. Для заданих відкритих підмножин U та V в $(\mathfrak{M}_X d)$ виберемо $[x] \in U \cap \mathfrak{M}_{00}$ і $[y] \in \mathfrak{M}_{00}$. Це можливо, оскільки \mathfrak{M}_{00} щільна в \mathfrak{M}_X . Потпунстимо, що $\hat{x} = (x_1, \dots, x_m)$, тобто $|\text{supp}(x)| = m$. Очевидно, що $m = m(x)$ є функцією від x . Для кожного $k \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $S_{\lambda, m, k}: \mathfrak{M}_X \rightarrow \mathfrak{M}_X$ за формулою

$$S_{\lambda, m, k}([y]) = \frac{1}{\lambda^{k+m}} [(1, \underbrace{1, \dots, 1}_m, y_1, y_2, \dots)].$$

Зауважимо, що

$$\|S_{\lambda, m, k}([y])\| \leq \frac{k\|y\|}{|\lambda^{k+m}|} \rightarrow 0, \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

для кожного $[y] \in \mathfrak{M}_X$. Нехай $k \in \mathbb{N}$ таке, що $[x] \triangleleft S_{\lambda, m, k}([y]) \in U$. Таке число k можна вибрати, оскільки за твердженням 3.7, маємо

$$[x] \triangleleft S_{\lambda, m, k}([y]) \rightarrow [x] \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Нехай

$$[z] = [x] \triangleleft S_{\lambda, m, k}([y]).$$

Оскільки $[x] \triangleleft S_{\lambda,m,k}([y]) \in U$, $[z] \in U$. Обчислимо $\tilde{B}_\lambda^{k+m}([z])$:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_\lambda^{k+m}([z]) &= \tilde{B}_\lambda^{k+m} \left[\left(x_1, \dots, x_m, \underbrace{\frac{1}{\lambda^{m+k}}, \dots, \frac{1}{\lambda^{m+k}}}_k, \frac{y_1}{\lambda^{m+k}}, \dots, \frac{y_m}{\lambda^{m+k}}, 0, \dots \right) \right] = \\ &= \tilde{B}_\lambda^k \left[\left(\underbrace{\frac{1}{\lambda^{m+k}}, \dots, \frac{1}{\lambda^{m+k}}}_k, \frac{y_1}{\lambda^k}, \dots, \frac{y_m}{\lambda^k}, 0, \dots \right) \right] = [y]. \end{aligned}$$

Отже, для кожної пари відкритих підмножин U і V існує $[z] \in U$ та $n = k + m \in \mathbb{N}$ такі, що $\tilde{B}_\lambda^{k+m}([z]) = [y] \in V$. Тому \tilde{B}_λ є топологічно транзитивним. \square

3.5. Змішуваність операторів диференціювання та лівих обернених до операторів \mathcal{C}_n

У даному підрозділі розглядається сильніша, ніж топологічна транзитивність, динамічна властивість операторів – змішуваність. Для встановлення цієї властивості використовується відомий критерій Китаї, який дає достатні умови змішуваності лінійного оператора. Далі цей критерій застосовано до операторів диференціювання $\partial_L(\cdot)(h)$ та $\partial_R(\cdot)(h)$, що діють у просторі $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$

Нагадаймо, що оператор T називається змішуючим, якщо для кожної пари U, V непорожніх відкритих підмножин X існує число N таке, що

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \text{для всіх } n \geq N.$$

Очевидно, якщо оператор T є змішуючим, то він є топологічно транзитивним.

Теорема 3.9. *Нехай $h \in \ell_1$ таке, що $P_1(h) > 1$. Тоді оператори*

$$\partial_L(\cdot)(h): f \mapsto \partial_L f(\cdot)(h) \quad \text{and} \quad \partial_R(\cdot)(h): f \mapsto \partial_R f(\cdot)(h)$$

є змішуючими на $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$.

Доведення. Розглянемо наступні відображення на стандартних субсиметричних поліномах

$$S_L(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}) = \frac{1}{|P_1(h)|} P_{1, \alpha_1, \dots, \alpha_m}$$

та

$$S_R(P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}) = \frac{1}{|P_1(h)|} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_m, 1}.$$

Оскільки стандартні поліноми утворюють лінійний базис в алгебрі субсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_1)$, то можна продовжити відображення S_L та S_R до лінійних операторів на $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_1)$ і для цих продовжень використовуватимемо ті самі позначення.

Алгебра $\mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_1)$ є щільним підпростором в $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$. Очевидно, що

$$\partial_L^n P(\cdot)(h) \rightarrow 0 \quad \text{і} \quad \partial_R^n P(\cdot)(h) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

та

$$(\partial_L(\cdot)(h) \circ S_L)(P) = P \quad \text{і} \quad (\partial_R(\cdot)(h) \circ S_R)(P) = P$$

для кожного $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_1)$. Крім того, легко перевірити, що $\|P_{1,\alpha_1,\dots,\alpha_m}\| \leq \|P_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}\|$ та $\|P_{\alpha_1,\dots,\alpha_m,1}\| \leq \|P_{\alpha_1,\dots,\alpha_m}\|$. Отже, для кожного $r > 0$,

$$\|S_L^n(P)\|_r \leq \frac{1}{|P_1(h)|^n} \|P\|_r \quad \text{та} \quad \|S_R^n(P)\|_r \leq \frac{1}{|P_1(h)|^n} \|P\|_r,$$

тобто

$$S_L^n(P) \rightarrow 0 \quad \text{і} \quad S_R^n(P) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

для кожного $P \in \mathcal{P}_{\mathfrak{E}}(\ell_1)$. Отже, оператори $\partial_L(\cdot)(h)$ та $\partial_R(\cdot)(h)$ задовольняють критерій Кітаї (Теорема 1.1). Таким чином, за умови $|P_1(h)| > 1$ оператори $\partial_L(\cdot)(h)$ та $\partial_R(\cdot)(h)$ є змiшуючими на $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$. □

Для випадку $h = (1, 0, 0, \dots)$ ми позначимо $\partial_L = \partial_L(\cdot)(h)$ та $\partial_R = \partial_R(\cdot)(h)$.

Теорема 3.10. *Оператори ∂_L та ∂_R є хаотичними в просторі $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$.*

Доведення. З теореми 3.9 випливає, що оператори ∂_L та ∂_R є топологічно транзитивними, тому, достатньо показати, що кожен з цих операторів має всюди щільну підмножину періодичних векторів у просторі $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$. Для довільних натуральних чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\alpha_1 > 1$ і комплексного параметра λ розглянемо функції

$$\mathcal{E}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P_{1,\dots,1}_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}}_k(\lambda x)$$

та

$$\mathcal{E}_0^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{P_{1,\dots,1}}_k(\lambda x).$$

Відомо [11], що $\|P_{\underbrace{1, \dots, 1}_k}\| = 1/k!$. Тому,

$$\|P_{\underbrace{1, \dots, 1}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n}\| \leq \|P_{\underbrace{1, \dots, 1}_k}\| \|P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}\| \leq \frac{1}{k!}.$$

Тому, для довільного значення комплексного параметра λ , радіус рівномірної збіжності функції $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ в нулі

$$r_0(\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda) = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \|P_{\underbrace{1, \dots, 1}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n}\|^{1/k + \alpha_1 + \dots + \alpha_n} \right)^{-1} = \infty.$$

Аналогічно, $r_0(\mathcal{E}_0^\lambda) = \infty$. Таким чином, функції $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ та \mathcal{E}_0^λ належать простору $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$. Застосуємо до цих функцій оператор ∂_L . З твердження 2.12, та враховуючи, що $P_1(h) = P_1(1, 0, 0, \dots) = 1$ маємо

$$\partial_L(\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda)(x) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} P_{\underbrace{1, \dots, 1}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n}(\lambda x) = \lambda \mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda(x),$$

$$\partial_L(\mathcal{E}_0^\lambda)(x) = \lambda \mathcal{E}_0^\lambda(x).$$

Отже, функції $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ та \mathcal{E}_0^λ , $\lambda \in \mathbb{C}$ є власними векторами оператора ∂_L з власними значеннями λ . Розглянемо випадок, коли $\lambda = e^{2i\theta\pi}$ для деякого додатного раціонального числа $\theta \in (0, 1)$. Тоді існує найменше натуральне число $N > 1$ таке, що $(e^{i\theta\pi})^{N+1} = e^{i\theta\pi}$. Тому, $\lambda^N = (e^{i\theta\pi})^N = 1$. Отже, в цьому випадку, функція $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ буде періодичним вектором з періодом N оператора ∂_L . Очевидно, що лінійна комбінація періодичних векторів є періодичним вектором. Покажемо, що лінійна оболонка функцій $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$, $\lambda = e^{2i\theta\pi}$, $\theta \in \mathbb{Q}$ буде всюди щільною підмножиною в $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$. Припустимо, що деякий лінійний неперервний функціонал ϕ на $H_{b\mathfrak{E}}(\ell_1)$ дорівнює нулю на всіх елементах $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ і \mathcal{E}_0^λ , $\lambda = e^{2i\theta\pi}$, $\theta \in \mathbb{Q}$. З щільності множини раціональних чисел в множині дійсних чисел та з неперервності ϕ випливає, що ϕ дорівнює нулю на множині $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$, $\lambda = e^{2i\theta\pi}$ для всіх $\theta \in [0, 1]$. Враховуючи формулу (1.2), отримуємо, що функціонал ϕ дорівнює нулю на всіх однорідних компонентах функцій $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ та \mathcal{E}_0^λ . Натуральні числа

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ були вибрані довільним чином так, що $\alpha_1 > 1$. Тому набори чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ та $(\underbrace{1, \dots, 1}_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $k, n \in \mathbb{N}$ пробігають всі можливі скінченні набори натуральних чисел, крім наборів вигляду $(1, \dots, 1)$. Отже, довільний стандартний поліном $P_{\gamma_1, \dots, \gamma_m}$ входить (з точністю до мультиплікативної константи) як однорідна компонента або до деякої функції $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ або до \mathcal{E}_0^λ . Тому ϕ дорівнює нулю на всіх стандартних поліномах. Це може бути лише тоді, коли ϕ – нульовий функціонал. Таким чином, не існує ненульового функціонала, який дорівнює нулю на всіх періодичних векторах оператора ∂_L . Тому множина періодичних векторів оператора ∂_L є всюди щільною і, отже, ∂_L є хаотичним.

У випадку оператора ∂_R доведення буде цілком аналогічним, якщо взяти замість функції $\mathcal{E}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda$ функцію

$$\mathcal{F}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \underbrace{1, \dots, 1}_k}(\lambda x).$$

□

Добре відомо, що зважений лівий зсув $B_\omega: (x_1, x_2, \dots) \mapsto \omega(x_2, x_3, \dots)$ (оператор Ролєвича) є змішуючим і хаотичним оператором [28, с. 70] на ℓ_p для $|\omega| > 1$. З іншого боку, оператор B_ω є лівим оберненим до оператора

$$S_\omega = \frac{1}{\omega} \mathcal{C}_1: (x_1, x_2, \dots) \mapsto \frac{1}{\omega}(0, x_1, x_2, \dots),$$

тобто, $B_\omega \circ S_\omega(x) = x$, $x \in \ell_p$. Ми розглянемо за яких умов лівий обернений оператор до оператора \mathcal{C}_n з деякою вагою буде змішуючим на ℓ_p .

Для фіксованої скінченної або нескінченної послідовності натуральних чисел $\mathbf{n} = n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ позначимо $B_{\mathbf{n}}$ оператор на ℓ_p визначений формулою

$$B_{\mathbf{n}}(x) = (x_1, \dots, x_{n_1-1}, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2-1}, x_{n_2+1}, \dots, x_{n_k-1}, x_{n_k+1}, \dots).$$

Іншими словами, оператор $B_{\mathbf{n}}$ діє на вектор x вилучаючи координати x_{n_1} , x_{n_2} і так далі. Легкобачити, що $B_{\mathbf{n}}$ є лівим оберненим до оператора \mathcal{C}_n .

Для $\omega \in \mathbb{C}$ ми позначимо $B_{\omega, \mathbf{n}} = \omega B_{\mathbf{n}}$. Очевидно, що оператори $B_{\omega, \mathbf{n}}$ є лінійними, неперервними і $\|B_{\omega, \mathbf{n}}\| = |\omega|$. Крім того, якщо $\mathbf{n} = 1$, то $B_{\omega, \mathbf{n}} = B_{\omega}$.

Теорема 3.11. *Оператор $B_{\omega, \mathbf{n}}$ є змішуючим на ℓ_p тоді і тільки тоді, коли $|\omega| > 1$ і підпоследовательність \mathbf{n} є такою, що $n_1 = 1$.*

Доведення. Змішуючий оператор на ℓ_p є гіперциклічним, тому його норма повинна бути більшою за 1. Отже, умова $|\omega| > 1$ є необхідною. Будемо надалі вважати, що ця умова виконується.

Позначимо $\mathcal{S}_{\omega, \mathbf{n}} = \frac{1}{\omega} \mathcal{C}_{\mathbf{n}}$. Якщо $n_1 = 1$, то $B_{\omega, \mathbf{n}}^m(x) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для кожного $x \in c_{00}$. Крім того, оскільки $|\omega| > 1$,

$$\mathcal{S}_{\omega, \mathbf{n}}^m(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty$$

для кожного $x \in c_{00}$ і, за побудовою оператора $\mathcal{S}_{\omega, \mathbf{n}}$,

$$B_{\omega, \mathbf{n}} \circ \mathcal{S}_{\omega, \mathbf{n}}(x) = x, \quad x \in \ell_p.$$

тому ми можемо застосувати Критерій Кітаї (Теорема 1.1) і отримати, що оператор $B_{\omega, \mathbf{n}}$ є змішуючим.

Припустимо, що $n_1 > 1$. Якщо оператор $B_{\omega, \mathbf{n}}$ є змішуючим, то він є гіперциклічним (оскільки ℓ_p – сепарабельний) і, отже, існує гіперциклічний вектор z оператора $B_{\omega, \mathbf{n}}$, тобто такий вектор, що множина

$$\text{Orb}(z, B_{\omega, \mathbf{n}}) = \{B_{\omega, \mathbf{n}}^m(z) : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

є всюди щільною в ℓ_p . Якщо $z_1 \neq 0$, то перша координата вектора $B_{\omega, \mathbf{n}}^m(z)$ буде дорівнювати $\omega^m z_1$ і норма

$$\|B_{\omega, \mathbf{n}}^m(z)\| \geq |\omega^m z_1|$$

буде монотонно прямувати до нескінченності. Це суперечить гіперциклічності $B_{\omega, \mathbf{n}}$ оскільки $\text{Orb}(z, B_{\omega, \mathbf{n}})$ не буде щільною у кулі з центром в нулі радіуса $|z_1|$. Якщо $z_1 = 0$, то перша координата вектора $B_{\omega, \mathbf{n}}^m(z)$ буде дорівнювати нулю для будь-якого m і тому точка $x = (1, 0, 0, \dots)$ не може бути наближена точками з $\text{Orb}(z, B_{\omega, \mathbf{n}})$. \square

Ми не знаємо чи змішуючі оператори $B_{\omega, \mathbf{n}}$ будуть хаотичними, в загальному випадку. Проте, для деяких конкретних випадків, можна довести хаотичність таких операторів.

Твердження 3.8. *Нехай \mathbf{n} – скінченна послідовність, яка складається з двох елементів $n_1 = 1, n_2 = 3$. Тоді оператор $B_{\omega, \mathbf{n}} = B_{\omega, (1,3)}$ буде хаотичним завжди коли $|\omega| > 1$.*

Доведення. Враховуючи попередню теорему достатньо показати, що множина періодичних точок оператора $B_{\omega, (1,3)}$ є всюди щільною в ℓ_p . Зауважимо, що для довільного $\lambda \in \mathbb{C}, 0 < |\lambda| < 1$, вектори

$$u_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \lambda, \lambda^3, \lambda^2, \lambda^4, \lambda^3, \lambda^5, \lambda^4, \lambda^6, \dots, \lambda^n, \lambda^{n+2}, \dots)$$

та

$$v_\lambda = (\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^4, \dots, \lambda^n, \lambda^n, \dots)$$

є власними векторами оператора $B_{\omega, (1,3)}$ з власними значеннями $\omega\lambda$. Справді,

$$\begin{aligned} B_{\omega, (1,3)}(u_\lambda) &= \omega(\lambda^2, \lambda^3, \lambda^2, \lambda^4, \lambda^3, \lambda^5, \lambda^4, \lambda^6, \dots, \lambda^n, \lambda^{n+2}, \dots) \\ &= \omega\lambda(\lambda, \lambda^2, \lambda, \lambda^3, \lambda^2, \lambda^4, \lambda^3, \lambda^5, \dots, \lambda^{n-1}, \lambda^{n+1}, \dots) = \omega\lambda u_\lambda \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} B_{\omega, (1,3)}(v_\lambda) &= \omega(\lambda^2, \lambda^3, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^4, \lambda^5, \lambda^5, \dots, \lambda^n, \lambda^n, \dots) \\ &= \omega\lambda(\lambda, \lambda^2, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^4, \dots, \lambda^n, \lambda^n, \dots) = \omega\lambda v_\lambda \end{aligned}$$

Отже, якщо $\lambda = e^{2\pi i\theta}/\omega$, то власні значення векторів u_λ та v_λ будуть дорівнювати $e^{2\pi i\theta}$. Якщо θ – раціональне число на відрізку $(0, 1)$, то існує мінімальне натуральне число N таке, що $e^{N2\pi i\theta} = e^{2\pi i\theta}$. Тому вектори u_λ та v_λ для раціональних θ будуть періодичними для $B_{\omega, (1,3)}$.

Покажемо, що лінійна оболонка побудованих періодичних векторів буде всюди щільною в ℓ_p . Нехай ϕ – деякий лінійний неперервний функціонал на ℓ_p . Тоді існує елемент $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_q$, де $1/p + 1/q = 1$ такий, що

$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Припустимо, що $\phi(u_\lambda) = 0$ і $\phi(v_\lambda) = 0$ для $\lambda = e^{2\pi i\theta}/\omega$ і довільного раціонального θ на відрізку $(0, 1)$. Тоді з умови $\phi(u_\lambda) = 0$ маємо

$$(y_1 + y_3)\lambda + (y_2 + y_5)\lambda^2 + (y_4 + y_7)\lambda^3 + (y_6 + y_9)\lambda^4 + \dots = 0 \quad (3.1)$$

та

$$y_1\lambda + (y_2 + y_3)\lambda^2 + (y_4 + y_5)\lambda^3 + (y_6 + y_7)\lambda^4 + \dots = 0 \quad (3.2)$$

для $\lambda = e^{2\pi i\theta}/\omega$ з раціональними θ . Враховуючи, що $|\lambda| < 1/\omega$, функції від λ , які задано формулами (3.1), (3.2) є аналітичними функціями в одиничному диску, множина нулів яких має граничну точку в середині одиничного диску. З відомої теореми про єдиність аналітичної функції на множині яка має граничну точку випливає, що функції (3.1) та (3.2) є тотожними нулями. З (3.1) маємо

$$y_1 + y_3 = 0,$$

$$y_2 + y_5 = 0,$$

$$y_4 + y_7 = 0,$$

...

$$y_{2n} + y_{2n+3} = 0, \quad n > 1,$$

...

З (3.2) маємо

$$y_1 = 0,$$

$$y_2 + y_3 = 0,$$

$$y_4 + y_5 = 0,$$

...

$$y_{2n} + y_{2n+n} = 0, \quad n > 1,$$

...

Порівнюючи ці дві системи, отримуємо, що $y_n = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, не існує ненульового функціонала на ℓ_p який дорівнює нулю на

всіх періодичних векторах. Отже, множина періодичних векторів є всюди щільною в ℓ_p і тому оператор $B_{\omega,(1,3)}$ є хаотичним.

□

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню субсиметричних поліномів на банахових просторах із субсиметричним базисом та пов'язаних з ними аналітичних функцій, побудові метрик на мультимножинах і впорядкованих мультимножинах, а також вивченню топологічної транзитивності та хаотичності операторів, пов'язаних з цими структурами. У роботі розв'язано актуальну задачу, що полягає у дослідженні алгебраїчних, аналітичних і динамічних властивостей операторів, які узагальнюють класичні оператори зсуву та диференціювання для субсиметричних функцій. Напрямок дослідження відповідає меті роботи, сформульованій у вступі, і охоплює як структурні питання теорії субсиметричних функцій, так і їх застосування в теорії операторів та топологічній динаміці. Отримані результати розвивають теорію субсиметричних поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах, розширюють підходи до дослідження топологічної транзитивності і хаотичності нелінійних операторів.

У дисертаційній роботі отримано такі основні наукові результати:

1. Досліджено алгебру субсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ та встановлено критерій еквівалентності елементів простору ℓ_p через значення субсиметричних поліномів. Побудовано продовження субсиметричних поліномів з ℓ_p на $\ell_p(\mathfrak{A})$ для цілком впорядкованої множини \mathfrak{A} , доведено коректність, лінійність та ізометричність такого продовження. Наведено приклади субсиметричних поліномів у функційних гільбертових просторах та досліджено їхні властивості. Отримано застосування цих результатів у теорії операторів: встановлено критерій рівності p -ядерних операторів за значеннями спектральних інваріантів, що задаються субсиметричними поліномами. Отриманий результат демонструє, що субсиметричні поліноми можна застосовувати не лише для опису функцій на банахових просторах, а й для дослідження спектральних властивостей операторів.

2. Досліджено множини нулів субсиметричних поліномів у нескінченновимірному випадку та описано їхні структурні властивості. Введе новий

клас прото-субсиметричних функцій, який розширює клас субсиметричних аналітичних функцій на банахових просторах із субсиметричним базисом, і доведено факторіальність відповідних алгебр. Також отримано результати з апроксимації субсиметричних функцій та встановлено умови їх наближення відповідними поліномами. Отримані результати мають важливе значення для побудови аналітичної теорії субсиметричних функцій, оскільки дозволяє переходити від загальних класів функцій до поліноміальних.

3. Досліджено похідні, пов'язані із субсиметричними функціями. Введено нові похідні ∂_L , ∂_R та ∂_M , узгоджені з операцією субсиметричного зсуву, та встановлено їхній зв'язок із похідною Гато. Отримані результати дозволяють застосовувати стандартні методи диференціального аналізу до субсиметричних функцій та одержувати явні формули для відповідних похідних.

4. Побудовано метрику на множині мультимножин \mathcal{M}_X та досліджено її основні властивості. Одержано загальний результат про побудову псевдометрики на фактор-просторах метричних просторів, який використано для побудови метричної структури на множині мультимножин. Встановлено узгодженість побудованої метрики з алгебраїчними операціями, а також можливість її застосування для дослідження неперервності та динамічних властивостей нелінійних операторів. Побудовано також метрику на множині впорядкованих мультимножин \mathfrak{M}_X та встановлено її зв'язок з алгебраїчною і топологічною структурою простору. Показано, що у нескінченновимірному випадку простір впорядкованих мультимножин не є повним, а його поповнення ізометричне відповідному банаховому простору.

5. Досліджено динамічні властивості операторів лівого зсуву $\mathfrak{T}_\lambda : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$ та $\tilde{B}_\lambda : \mathfrak{M}_X \rightarrow \mathfrak{M}_X$ на просторах мультимножин і впорядкованих мультимножин відповідно. Встановлено умови топологічної транзитивності цих операторів, а також досліджено їхні динамічні властивості у відповідних метричних просторах. Крім того, до операторів диференціювання, пов'язаних із алгебрами субсиметричних функцій,

застосовано критерій Китаї та одержано умови змішуваності й хаотичності відповідних операторів. Отримані результати демонструють можливість поширення методів теорії лінійної динаміки на оператори, побудовані за допомогою субсиметричних структур.

Отже, сукупність всіх отриманих результатів формує цілісну схему дослідження, у якій поєднано теорію субсиметричних поліномів і аналітичних функцій, метричну теорію мультимножин та динаміку операторів на відповідних просторах. Практична цінність роботи полягає насамперед у розробці нового теоретичного методу, який можна використовувати у подальших дослідженнях інваріантних функцій, операторних алгебр і топологічної динаміки на нескінченновимірних просторах.

Результати дисертаційної роботи утворюють систему тверджень, у якій алгебраїчні, аналітичні, метричні та динамічні аспекти розглянуто як взаємопов'язані складові єдиного підходу. Запропоновані методи можуть надалі використовуватися як основа для нових результатів у теорії інваріантних поліномів, аналізі на банахових просторах і дослідженні динаміки операторів.

Дисертаційне дослідження може бути корисним для науковців, аспірантів і дослідницьких колективів закладів вищої освіти та наукових установ, зокрема Карпатського національного університету імені Василя Стефаника, Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, Волинського національного університету імені Лесі Українки, Львівського національного університету імені Івана Франка, Інституту математики НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, а також інших науково-освітніх центрів України та світу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebra of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc. — 2003. — Vol. 35. — P. 55–64. <https://doi.org/10.1112/S0024609302001431>
2. Aron R.M.; Cole B.J.; Gamelin T.W. Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space // Reine Angew. Math. — 1991 — Vol. 415 — P. 51–93.
3. Aron R.M., Falcó J., Maestre M. Separation theorems for group invariant polynomials // J. Geom. Anal. — 2018. — Vol. 28. — P. 393–404. <https://doi.org/10.1007/s12220-017-9825-0>
4. Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I. Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space // Bull. Lond. Math. Soc. — 2016. — Vol. 48. — P. 779–796. <https://doi.org/10.1112/blms/bdw043>
5. Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. Algebraic basis of the algebra of all symmetric continuous polynomials on the cartesian product of ℓ_p -Spaces // Axioms — 2022. — Vol. 11. — No. 41. <https://doi.org/10.3390/axioms11020041>
6. Bayart F., Matheron É. Dynamics of Linear Operators. Cambridge University Press: New York, NY, USA, 2009.
7. Bihun V., Dolishniak D., Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. Subsymmetric polynomials on Banach spaces and their applications // Mathematics — 2025 — 13, 3693. <https://doi.org/10.3390/math13223693>.
8. Boiso M.C., Hajek P. Analytic approximations of uniformly continuous functions in real Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. — 2001 — Vol. 256 — P. 80–98. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7291>.

9. Chernega I.V. A semiring in the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions in the space ℓ_1 // J. Math. Sci. — 2016. — Vol. 212. — P. 38–45. <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2647-3>
10. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A.: Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinb. Math. Soc. — 2012. — Vol. 55. — P. 125–142. <https://doi.org/10.1017/S0013091509001655>
11. Chernega, I.; Galindo, P.; Zagorodnyuk, A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — 395 — P. 569–577. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.04.087>
12. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces // European Journal of Mathematics — 2020. — Vol. 6. — P. 153–163. <https://doi.org/10.1007/s40879-019-00390-z>.
13. Chernega I., Martsinkiv M., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.: Applications of Supersymmetric Polynomials in Statistical Quantum Physics // Quantum Rep. — 2023. — Vol. 5. — P. 683–697. <https://doi.org/10.3390/quantum5040043>
14. Chernega I., Zagorodnyuk A.: Supersymmetric Polynomials and a Ring of Multisets of a Banach Algebra // Axioms — 2022. — Vol. 11. — No. 511. <https://doi.org/10.3390/axioms11100511>
15. Chernega I., Zagorodnyuk A. Unbounded symmetric analytic functions on ℓ_1 // Math. Scand. — 2018. — Vol. 122. — P. 84–90. <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-102082>.
16. Chopyyuk Y., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.: Rings of Multisets and Integer Multinumerals // Mathematics — 2022. — Vol. 10(5). — No. 778. <https://doi.org/10.3390/math10050778>

17. D'Alessandro S., Hájek P. Polynomial algebras and smooth functions in Banach spaces // *em J. Funct. Anal.* — 2014 — Vol. 266 — P. 1627–1646. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2013.11.017>.
18. D'Alessandro S., Hájek P., Johanis M. Erratum to: “Polynomial algebras on classical Banach spaces” // *Isr. J. Math.* — 2015 — Vol. 207 — P. 1003–1012. <https://doi.org/10.1007/s11856-015-1155-y>.
19. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // *International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory. (Rome, Italy, 18th July, 2023): book of abstracts.* — Rome: International Telematic University UNINETTUNO. — 2023. — P. 45–48.
20. Daryna Dolishniak Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // *Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики. (Чернівці, 28–30 вересня 2023 р.): тези допов.* — Чернівці: Чернівецьк. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. — 2023. — С. 35–36.
21. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk, Pavlo Dolishniak Topological transitivity of a nonlinear backward shift // *International Workshop on Modern Problems of Analysis, Optimization, Approximation and Their Applications. (Rome, Italy, 25th, 26th and 27th June, 2025): book of abstracts.* — Rome: International Telematic University UNINETTUNO. — 2025. — P. 85–87.
22. Dolishniak D. Y., Zagorodnyuk A. V. Metric Semigroups and Groups of Multisets // *Res. Math.* — 2024. — Vol. 32, № 3. — P. 12 – 25. <https://doi.org/10.15421/242430>.
23. Dolishniak D., Dolishniak P., Zagorodnyuk A. Nonlinear backward shifts on the ring of multisets // *Міжнародна конференція,присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана. (Чернівці, 23–27 вересня*

- 2024 р.): тези допов. — Чернівці: Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. — 2024. — С. 123.
24. Dolishniak D., Kravtsiv V. Subsymmetric Functions on Banach Spaces With Subsymmetric Bases // Carpathian Math. Publ. — 2026. — Vol. 18, № 1. — P. 49–66. <https://orcid.org/0009-0000-5686-1895>.
 25. Falcó J., García D., Jung M., Maestre M.: Group-invariant separating polynomials on a Banach space // Publicaciones Matemáticas — 2022. — Vol. 66. — P. 207–233. <https://doi.org/10.5565/PUBLMAT6612209>
 26. Gonzalo R.: Multilinear forms, subsymmetric polynomials, and spreading models on Banach spaces // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — P. 379–397. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0322>.
 27. González M., Gonzalo R., Jaramillo J.A. Symmetric polynomials on rearrangement-invariant function spaces // J. Lond. Math. Soc. — 1999 — Vol. 59 — P. 681–697. <https://doi.org/10.1112/S0024610799007164>.
 28. Grosse-Erdmann K.-G., Peris Manguillot A.: Linear Chaos. Universitext. Springer, London, 2011.
 29. Halushchak I., Novosad Z., Tsizhma Y., Zagorodnyuk A.: Logistic Map on the Ring of Multisets and Its Application in Economic Models // Mathematics and Statistics — 2020. — Vol. 8(4). — P. 424–429. <https://doi.org/10.13189/ms.2020.080408>
 30. Halushchak S. Algebras of analytic functions on Banach spaces, generated by countable sets of polynomials and their properties // AIP Conf. Proc. — 2022. — Vol. 2483. — Article 030006. <https://doi.org/10.1063/5.0117601>.
 31. Halushchak S. I. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // Mat. Stud. — 2021. — Vol. 56(1). — P. 106–112. <https://doi.org/10.30970/ms.56.1.107-112>.

32. Halushchak S. Spectra of some algebras of entire functions of bounded type, generated by a sequence of polynomials // Carpathian Math. Publ. — 2019 — Vol. 11 — P. 311–320. <https://doi.org/10.15330/cmp.11.2.311-320>.
33. Handera-Kalynovska O.V., Kravtsiv V.V.: The Waring-Girard formulas for symmetric polynomials on spaces ℓ_p // Carpathian Math. Publ. — 2024. — Vol. 16. — P. 407–413. <https://doi.org/10.15330/cmp.16.2.407-413>
34. Hryniv R., Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.: Symmetric and supersymmetric polynomials on ℓ_p and partition functions in quantum statistical physics // Phys. Scr. — 2025 — Article ID 075208. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/adde1e>
35. Jawaid F., Zagorodnyuk A.: Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series // Symmetry — 2019. — Vol. 11(9). — 1111. <https://doi.org/10.3390/sym11091111>
36. Kravtsiv V.: Block-Supersymmetric Polynomials on Spaces of Absolutely Convergent Series // Symmetry — 2024. — Vol. 16. — 179. <https://doi.org/10.3390/sym16020179>
37. Lindenstrauss J., Tzafriri L.: Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. Springer, New York, 1977.
38. Macdonald I.G. Symmetric Functions and Orthogonal Polynomials. University Lecture Serie; AMS: Providence, RI, USA. — 1997 — Volume 12.
39. Manoussos A.: A Birkhoff type transitivity theorem for non-separable completely metrizable spaces with applications to linear dynamics // J. Operator Theory — 2013. — Vol. 70(1). — P. 165–174. <https://doi.org/10.7900/jot.2011may12.1971>

40. Martsinkiv M., Vasylyshyn S., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A.: Lipschitz symmetric functions on Banach spaces with symmetric bases // Carpathian Math. Publ. — 2021. — Vol. 13(3). — P. 727–733. <https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.727-733>
41. Mason, J. Some properties and applications of Chebyshev polynomial and rational approximation. In *Rational Approximation and Interpolation*; Graves-Morris, P.R., Saff, E.B., Varga, R.S. Eds.; Lecture Notes in Mathematics, vol 1105; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1984; pp. 27–48. <https://doi.org/10.1007/BFb0072398>.
42. Nemirovskii A., Semenov S. On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR-Sb. — 1973 — Vol. 21 — P. 255–277. <https://doi.org/10.1070/SM1973v021n02ABEH002016>.
43. Nikolski, N.K. *Treatise on the Shift Operator: Spectral Function Theory* // Springer: Berlin/Heidelberg, Germany — 1986.
44. Novosad Z., Vasylyshyn S., Zagorodnyuk A. Countably generated algebras of analytic functions on Banach spaces // Axioms — 2023. — Vol. 12(8). — Article 798. <https://doi.org/10.3390/axioms12080798>.
45. Novosad Z.: Topological transitivity of translation operators in a non-separable Hilbert space // Carpathian Math. Publ. — 2015. — Vol. 25(1). — P. 278–285. <https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.278-285>
46. Plichko A., Zagorodnyuk A. On automatic continuity and three problems of The Scottish book concerning the boundedness of polynomial functionals // J. Math. Anal. Appl — 1998. — 220 — P. 477–494. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5826>.
47. Rolewicz S.: On orbits of elements // Studia Math. — 1969. — Vol. 33. — P. 17–22. <https://doi.org/10.4064/sm-32-1-17-22>

48. Vitaliy Bihun, Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk, Zeros of susymmetric polynomials on ℓ_p // XII International Skorobohatko Mathematical Conference. (Lviv, 23–25 September, 2025): book of abstracts. — Lviv: Lviv Ivan Franko National University. — 2025. — P. 8.
49. Vasylyshyn T.: Algebras of Symmetric and Block-Symmetric Functions on Spaces of Lebesgue Measurable Functions // Carpathian Math. Publ. — 2024. — Vol. 16. — P. 174–189. <https://doi.org/10.15330/cmp.16.1.174-189>
50. Vasylyshyn S. I. Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces and operations on spectra // Carpathian Math. Publ. — 2023. — Vol. 15(1). — P. 104–119. <https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.104-119>.
51. Weaver N.: Lipschitz Algebras. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.
52. Zagorodnyuk A., Novosad Z.: Topological Transitivity of Shift Similar Operators on Nonseparable Hilbert Spaces // Journal of Functional Spaces — 2021. — Article ID 9306342. <https://doi.org/10.1155/2021/9306342>
53. Zagorodnyuk A.V. The Nulstellensatz on infinite-dimensional complex spaces // J. Math. Sci. — 1999 — Vol. 96 — P. 2951–2956. <https://doi.org/10.1007/BF02169686>.

ДОДАТОК А

Список публікацій за темою дисертації

1. Dolishniak D. Y., Zagorodnyuk A. V. Metric Semigroups and Groups of Multisets // Res. Math.— 2024. — Vol. 32, № 3. — P. 12 – 25.
DOI: <https://doi.org/10.15421/242430>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85219050259?origin=resultslist>
2. Bihun V., Dolishniak D., Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. Subsymmetric Polynomials on Banach Spaces and Their Applications // Mathematics – 2025. – 13(22), 3693.
DOI: <https://doi.org/10.3390/math13223693>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105023129716?origin=resultslist>
3. Dolishniak D., Kravtsiv V. Subsymmetric Functions on Banach Spaces With Subsymmetric Bases // Carpathian Math. Publ. – 2026. – Vol. 18, № 1. — P. 49 – 66.
DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.18.1.49-66>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105033768287?origin=resultslist>
4. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (Rome, Italy, 18th July, 2023): book of abstracts — Rome, Italy. — 2023. — P. 45 – 48.
5. Daryna Dolishniak Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 28–30 вересня 2023 р.): тези допов. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2023. — С. 35 – 36.
6. Dolishniak D., Dolishniak P., Zagorodnyuk A. Nonlinear backward shifts on the ring of multisets // Міжнародна конференція, присвячена 145-

річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23–27 вересня 2024 р.): тези допов. — Чернівці. — 2024. — С. 123.

7. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk, Pavlo Dolishniak Topological transitivity of a nonlinear backward shift // International Workshop on Modern Problems of Analysis, Optimization, Approximation and Their Applications (Rome, Italy, 25 – 27 June, 2025): book of abstracts. — Rome, Italy. — 2025. — P. 85 – 87.
8. Vitaliy Bihun, Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk Zeros of susymmetric polynomials on ℓ_p // XII International Skorobohatko Mathematical Conference (September 23-25): book of abstracts. — Lviv, Ukraine. — 2025. — P. 8.

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на таких міжнародних наукових конференціях і семінарах:

1. Міжнародній онлайн конференції “Сучасні тенденції в абстрактному та прикладному аналізі” (Івано-Франківськ, 12–15 травня 2022 р.);
2. Міжнародному семінарі з сучасних тенденцій в аналізі та теорії наближень (Рим, Італія, 18 липня 2023 р.);
3. Міжнародній науковій конференції, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 28–30 вересня, 2023 р.);
4. Міжнародній конференції, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23–27 вересня 2024 р.)
5. Міжнародному семінарі з сучасних проблем аналізу, оптимізації, апроксимації та їх застосування (Рим, Італія, 25–27 червня 2025 р.)
6. XII міжнародній математичній конференції імені Скоробагатька (Львів, 23–25 вересня 2025 р.);
7. Звітних наукових конференціях викладачів, докторантів, аспірантів Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.