

АНОТАЦІЯ

Долішняк Д. Ю. Топологічна транзитивність та хаотичність операторів, пов'язаних з симетричними та субсиметричними поліномами. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика. — Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2026 — Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, 2026.

Дисертаційна робота виконана у межах теорії поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах і присвячена дослідженню операторів, пов'язаних із симетричними та субсиметричними поліномами, а також вивченню субсиметричних аналітичних функцій, метричних структур, визначених на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин та динамічних властивостей нелінійних відображень, що виникають у цих випадках. У роботі поєднано кілька взаємопов'язаних напрямів сучасної математики: нелінійний функціональний аналіз, теорію симетричних та субсиметричних поліномів, теорію аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах, метричну теорію мультимножин і динаміку операторів. Саме таке поєднання дає змогу розглядати симетричні та субсиметричні конструкції не лише як алгебраїчні об'єкти, а як й структури, для яких характерна складна топологічна та динамічна поведінка.

Теорія симетричних і субсиметричних поліномів відіграють важливу роль у класичній алгебрі та сучасному функціональному аналізі. У другій половині ХХ століття ідеї, пов'язані з симетричними поліномами, були перенесені в нескінченновимірний простір, де предметом дослідження стали поліноми й аналітичні функції на банахових просторах, їх алгебраїчна будова, спектральні властивості та апроксимаційні характеристики. Значний внесок у розвиток цього напрямку зробили Р. Арон, П. Галіндо, А. Загороднюк, І. Чернега, Т. Васишлин, С. Васишлин, В. Кравців, Ф. Джавад, Р. Гонсало та інші науковці. У їхніх працях вивчалися алгебраїчні бази си-

метричних поліномів, спектри алгебр аналітичних функцій, факторизація, а також різні класи симетричних, блочно-симетричних, суперсиметричних і субсиметричних функцій. У роботах, присвячених симетричним аналітичним функціям на просторах ℓ_p , розглядалися як точкові функціонали, так і більш загальні спектральні елементи, що дало змогу детальніше зрозуміти, як симетрія простору визначає структуру алгебр функцій.

Природним узагальненням симетричних поліномів у нескінченновимірному випадку є субсиметричні поліноми, що виникають на банахових просторах із субсиметричним базисом. У цьому напрямі важливими є результати Р. Гонсало, а також подальші дослідження, у яких розглядалися алгебри субсиметричних поліномів, їх множини нулів, властивості факторіальності та різні застосування в теорії операторів. Окремий напрям дослідження, на який спирається дисертація, стосується мультимножин та пов'язаних із ними алгебраїчних і метричних структур. У ширшому математичному контексті варто згадати роботи Р. Дедекінда, К. Вейєрштрасса, Д. Кнута, Р. Меєра, М. Макроббі, а в сучасному функціональному аналізі — І. Чернегу, Т. Василюшина, А. Загороднюка, Ю. Чоп'юка, В. Кравців та їхніх співавторів. Перехід до мультимножин виникає при факторизації простору за відношенням еквівалентності. Побудова на таких множинах метрик, узгоджених з алгебраїчними операціями, дає можливість коректно вивчати збіжність, неперервність, щільність орбіт, транзитивність та інші динамічні характеристики. Не менш важливим є і зв'язок дисертаційної роботи з класичною теорією динаміки операторів, у якій фундаментальні результати належать Г. Біркгофу, С. Ролевичу, Ч. Кітаї, А. Перісу Мангільйоту, А. Мануссосу та іншим математикам.

Як було показано вище, дослідження симетричних і субсиметричних поліномів на банахових просторах приводить не лише до вивчення алгебраїчних властивостей відповідних класів функцій, а й до аналізу пов'язаних із ними факторних та метричних структур. Зокрема, перехід до мультимножин і впорядкованих мультимножин дає змогу описувати еквівалентність

елементів простору, будувати природні метрики на відповідних множинах і досліджувати оператори, що діють на цих просторах. У дисертаційній роботі цей підхід розглянено для субсиметричних поліномів та функцій на банахових просторах, а також для операторів, пов'язаних із симетричними і субсиметричними поліномами.

Основним завданням дисертаційного дослідження є вивчення алгебраїчних та аналітичних властивостей субсиметричних поліномів і пов'язаних із ними функцій, побудова та дослідження метричних структур на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин, а також встановлення умов топологічної транзитивності, хаотичності та зміщуваності відповідних операторів. Зокрема, у роботі досліджуються властивості алгебр субсиметричних поліномів, множини нулів таких поліномів, прото-субсиметричні функції, апроксимація і похідні субсиметричних функцій, а також динамічні властивості операторів лівого зсуву й операторів диференціювання.

Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатка, який містить публікації автора та апробації результатів дисертаційної роботи.

У вступі подано загальну характеристику дисертаційної роботи, обґрунтовано доцільність дослідження обраної теми та описано її місце в сучасних наукових напрямках. Визначено зв'язок роботи з науководослідними темами і проєктами, сформульовано мету та основні завдання дослідження, уточнено об'єкт, предмет і використані методи. Окремо висвітлено наукову новизну одержаних результатів, їхнє теоретичне і практичне значення, наведено відомості про особистий внесок здобувачки, а також подано інформацію про публікації та апробацію основних результатів дисертації.

Перший розділ має оглядово-теоретичний характер. У ньому проаналізовано наукові праці, безпосередньо пов'язані з тематикою дисертації, викладено базові результати та поняття, що становлять теоретичне підґрунтя подальших досліджень.

Другий розділ присвячено вивченню субсиметричних аналітичних функцій на банахових просторах. У цьому розділі досліджено алгебраїчні властивості алгебр субсиметричних поліномів, розглянуто їх застосування в теорії операторів, проаналізовано множини нулів субсиметричних поліномів, введено клас прото-субсиметричних функцій, а також одержано результати щодо апроксимації і диференціювання субсиметричних функцій.

У підрозділі 2.1 досліджено властивості алгебр субсиметричних поліномів на банахових просторах із субсиметричним базисом. Основну увагу зосереджено на алгебрі субсиметричних поліномів $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ на просторі ℓ_p . Розглянуто питання еквівалентності елементів $x, y \in \ell_p$ за значеннями субсиметричних поліномів і встановлено відповідні критерії. Крім того, досліджено гомоморфізми цієї алгебри, а також побудовано продовження субсиметричних поліномів зі збереженням їх основних властивостей.

У підрозділі 2.2 розглянуто продовження субсиметричних функцій на ширші класи просторів. Побудовано продовження субсиметричних поліномів та досліджено умови збереження їхніх основних властивостей, зокрема ізометричності.

У підрозділі 2.3 наведено приклади субсиметричних поліномів у функційних гільбертових просторах. Розглянуто конкретні конструкції поліномів та проаналізовано їхні властивості в межах функційних гільбертових просторів.

У підрозділі 2.4 розглянуто застосування субсиметричних поліномів у теорії операторів. Показано, що поліноми з класу $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ можуть бути використані для опису спектральних властивостей операторів. У такому випадку алгебраїчні властивості субсиметричних поліномів пов'язуються з операторними задачами.

У підрозділі 2.5 розглянуто множини нулів субсиметричних поліномів на просторі X . Досліджено їхні структурні властивості в нескінченновимірному просторі та показано, що ядра таких поліномів мають нетривіальну

будову.

У підрозділі 2.6 досліджено алгебри субсиметричних поліномів. Розглянуто властивості відповідних алгебр, їх гомоморфізми та факторіальні властивості. Доведено, що на комплексному просторі ℓ_p з субсиметричним ядром буде субсиметричним.

У підрозділі 2.7 введено клас прото-субсиметричних функцій і досліджено його основні властивості. Показано, що цей клас пов'язаний із субсиметричними поліномами та аналітичними функціями, але водночас є ширшим за клас стандартних субсиметричних функцій.

У підрозділі 2.8 одержано результати про апроксимацію субсиметричних функцій поліномами відповідного типу. Розглянуто умови, за яких функції із субсиметричними властивостями можна наближати поліномами з алгебри $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ або споріднених класів.

У підрозділі 2.9 досліджено похідні, пов'язані із субсиметричними функціями. Введено похідні ∂_L , ∂_R та ∂_M , узгоджені з операцією субсиметричного зсуву, і встановлено їхній зв'язок із похідною Гато.

Третій розділ присвячено дослідженню динаміки операторів, пов'язаних із симетричними та субсиметричними структурами. Основну увагу приділено побудові метричних структур на множинах мультимножин і впорядкованих мультимножин, а також вивченню топологічної транзитивності та змішуваності відповідних операторів.

У підрозділі 3.1 побудовано метрику на множині мультимножин \mathcal{M}_X^+ та досліджено її основні властивості. Показано, що ця метрика узгоджується з алгебраїчними операціями на просторі мультимножин і може бути використана для аналізу збіжності, неперервності та динамічної поведінки відповідних відображень.

У підрозділі 3.2 побудовано метрику на множині впорядкованих мультимножин \mathfrak{M}_X та встановлено її зв'язок з алгебраїчною і топологічною структурою цього простору.

У підрозділі 3.3 досліджено оператор лівого зсуву $\mathfrak{T}_\lambda : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$ у

просторі мультимножин та встановлено умови його топологічної транзитивності.

У підрозділі 3.4 розглянуто оператор лівого зсуву \tilde{B}_λ у просторі впорядкованих мультимножин і досліджено його топологічну транзитивність.

У підрозділі 3.5 застосовано критерій Китаї до операторів диференціювання та лівих обернених до операторів, пов'язаних із алгебрами субсиметричних функцій. Одержано умови змішуваності та хаотичності відповідних операторів.

Ключові слова: простір цілих функцій, простори сумовних послідовностей, функції першого класу Бера, поліном на банаховому просторі, симетричний поліном, субсиметричний поліном, субсиметрична функція, апроксимація поліномами, мультимножина, впорядкована мультимножина, метризований топологічний простір, лінійний оператор лівого зсуву, оператор диференціювання, топологічна транзитивність, хаотичність.

ABSTRACT

Dolishniak D. Y. Topological Transitivity and Chaoticity of Operators Associated with Symmetric and Subsymmetric Polynomials. — Qualifying scientific work as a manuscript.

The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree in Mathematics, speciality 111 — Mathematics. — Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2026. — Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ivano-Frankivsk, 2026.

The thesis was carried out within the framework of the theory of polynomials and analytic functions on Banach spaces and is devoted to the study of operators associated with symmetric and subsymmetric polynomials, as well as to the investigation of subsymmetric analytic functions, metric structures on sets of multisets and ordered multisets, and dynamical properties of nonlinear mappings arising in these settings. The work combines several interrelated areas of modern mathematics: nonlinear functional analysis, the theory of symmetric and subsymmetric polynomials, the theory of analytic functions on infinite-dimensional spaces, the metric theory of multisets, and operator dynamics. Such a combination makes it possible to consider symmetric and subsymmetric constructions not only as algebraic objects, but also as structures characterized by complicated topological and dynamical behavior.

The theory of symmetric and subsymmetric polynomials plays an important role in classical algebra and modern functional analysis. In the second half of the twentieth century, ideas related to symmetric polynomials were transferred to infinite-dimensional spaces, where polynomials and analytic functions on Banach spaces, their algebraic structure, spectral properties, and approximation characteristics became the subject of investigation. Significant contributions to the development of this direction were made by R. Aron, P. Galindo, A. Zagorodnyuk, I. Chernega, T. Vasylyshyn, S. Vasylyshyn, V. Kravtsiv, F. Jawad, R. Gonzalo, and other researchers. Their works studied algebraic bases of symmetric polynomials, spectra of algebras of analytic functi-

ons, factorization, as well as various classes of symmetric, block-symmetric, supersymmetric, and subsymmetric functions. In works devoted to symmetric analytic functions on the spaces ℓ_p , both point evaluations and more general spectral elements were considered, which allowed a more detailed understanding of how the symmetry of the space determines the structure of function algebras.

A natural generalization of symmetric polynomials in the infinite-dimensional case is provided by subsymmetric polynomials arising on Banach spaces with a subsymmetric basis. In this direction, important results belong to R. Gonzalo, as well as to subsequent studies devoted to algebras of subsymmetric polynomials, their zero sets, factoriality properties, and various applications in operator theory. Another direction of research on which the thesis relies concerns multisets and the algebraic and metric structures associated with them. In a broader mathematical context, it is worth mentioning the works of R. Dedekind, K. Weierstrass, D. Knuth, R. Meyer, and M. Macrobbi, while in modern functional analysis related studies were carried out by I. Chernega, T. Vasylyshyn, A. Zagorodnyuk, Yu. Chopiuk, V. Kravtsiv, and their co-authors. The transition to multisets arises naturally in the factorization of a space with respect to an equivalence relation. Constructing metrics on such sets that are compatible with algebraic operations makes it possible to correctly investigate convergence, continuity, density of orbits, transitivity, and other dynamical characteristics. Equally important is the connection of the thesis with the classical theory of operator dynamics, in which fundamental results belong to G. Birkhoff, S. Rolewicz, C. Kitai, A. Peris Manguillot, A. Manoussos, and other mathematicians.

As shown above, the study of symmetric and subsymmetric polynomials on Banach spaces leads not only to the investigation of algebraic properties of the corresponding classes of functions, but also to the analysis of the associated factor and metric structures. In particular, the transition to multisets and ordered multisets makes it possible to describe the equivalence of elements of

a space, construct natural metrics on the corresponding sets, and investigate operators acting on these spaces. In the thesis, this approach is considered for subsymmetric polynomials and functions on Banach spaces, as well as for operators associated with symmetric and subsymmetric polynomials.

The main objective of the thesis is to investigate algebraic and analytic properties of subsymmetric polynomials and the functions associated with them, to construct and study metric structures on sets of multisets and ordered multisets, and to establish conditions for topological transitivity, chaoticity, and mixing of the corresponding operators. In particular, the thesis studies properties of algebras of subsymmetric polynomials, zero sets of such polynomials, proto-symmetric functions, approximation and derivatives of subsymmetric functions, as well as dynamical properties of backward shift operators and differentiation operators.

The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusions, a list of references, and an appendix containing the author's publications and presentation of the results of the thesis.

The introduction presents a general description of the thesis, substantiates the relevance of the chosen topic, and describes its place within contemporary scientific directions. The connection of the thesis with research projects and scientific programs is specified, the aim and the main objectives of the study are formulated, and the object, subject, and methods of research are clarified. Particular attention is paid to the scientific novelty of the obtained results, their theoretical and practical significance, information about the author's personal contribution, as well as information concerning the publication and approbation of the main results of the thesis.

The first chapter is of a survey-theoretical nature. It analyzes scientific works directly related to the topic of the thesis and presents the basic results and notions forming the theoretical foundation for further investigations.

The second chapter is devoted to the study of subsymmetric analytic functions on Banach spaces. This chapter investigates algebraic properties of

algebras of subsymmetric polynomials, considers their applications in operator theory, analyzes zero sets of subsymmetric polynomials, introduces the class of proto-subsymmetric functions, and obtains results concerning approximation and differentiation of subsymmetric functions.

In Subsection 2.1 properties of algebras of subsymmetric polynomials on Banach spaces with a subsymmetric basis are investigated. Particular attention is focused on the algebra of subsymmetric polynomials $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ on the space ℓ_p . Questions of equivalence of elements $x, y \in \ell_p$ with respect to the values of subsymmetric polynomials are considered, and the corresponding criteria are established. In addition, homomorphisms of this algebra are investigated, and extensions of subsymmetric polynomials preserving their main properties are constructed.

In Subsection 2.2 extensions of subsymmetric functions to wider classes of spaces are considered. Extensions of subsymmetric polynomials are constructed and conditions for preserving their main properties, in particular isometricity, are investigated.

In Subsection 2.3 examples of subsymmetric polynomials in functional Hilbert spaces are presented. Concrete constructions of such polynomials are considered and their properties within functional Hilbert spaces are analyzed.

In Subsection 2.4 applications of subsymmetric polynomials to operator theory are considered. It is shown that polynomials from the class $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ can be used to describe spectral properties of operators. In this case, algebraic properties of subsymmetric polynomials are related to operator-theoretic problems.

In Subsection 2.5 zero sets of subsymmetric polynomials on the space X are considered. Their structural properties in infinite-dimensional spaces are investigated, and it is shown that kernels of such polynomials have a nontrivial structure.

In Subsection 2.6 algebras of subsymmetric polynomials are investigated. Properties of the corresponding algebras, their homomorphisms, and factoriality properties are considered. It is proved that on the complex space ℓ_p with a

subsymmetric kernel will be subsymmetric.

In Subsection 2.7 the class of proto-subsymmetric functions is introduced and its main properties are investigated. It is shown that this class is related to subsymmetric polynomials and analytic functions, while at the same time being broader than the class of standard subsymmetric functions.

In Subsection 2.8 results on approximation of subsymmetric functions by polynomials of the corresponding type are obtained. Conditions under which functions with subsymmetric properties can be approximated by polynomials from the algebra $\mathcal{P}_{\mathfrak{S}}(\ell_p)$ or related classes are considered.

In Subsection 2.9 derivatives associated with subsymmetric functions are investigated. The derivatives ∂_L , ∂_R and ∂_M , consistent with the operation of subsymmetric shift, are introduced, and their relation to the Gateaux derivative is established.

The third chapter is devoted to the study of the dynamics of operators associated with symmetric and subsymmetric structures. The main attention is paid to the construction of metric structures on sets of multisets and ordered multisets, as well as to the investigation of topological transitivity and mixing properties of the corresponding operators.

In Subsection 3.1 a metric on the set of multisets \mathcal{M}_X^+ is constructed and its main properties are investigated. It is shown that this metric is compatible with algebraic operations on the space of multisets and can be used for the analysis of convergence, continuity, and dynamical behavior of the corresponding mappings.

In Subsection 3.2 a metric on the set of ordered multisets \mathfrak{M}_X is constructed and its connection with the algebraic and topological structure of this space is established.

In Subsection 3.3 the backward shift operator $\mathfrak{T}_\lambda : \mathcal{R}_+^X \rightarrow \mathcal{R}_+^X$ on the space of multisets is investigated, and conditions for its topological transitivity are established.

In Subsection 3.4 the backward shift operator \tilde{B}_λ on the space of ordered

multisets is considered and its topological transitivity is investigated.

In Subsection 3.5 Kitai's criterion is applied to differentiation operators and left inverses associated with algebras of subsymmetric functions. Conditions for mixing and chaoticity of the corresponding operators are obtained.

Key words: space of entire functions, spaces of summable sequences, functions of the first Baire class, polynomial on a Banach space, symmetric polynomial, subsymmetric polynomial, subsymmetric function, approximation by polynomials, multiset, ordered multiset, metrizable topological space, backward shift linear operator, differentiation operator, topological transitivity, chaoticity.

Список публікацій здобувача, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Dolishniak D. Y., Zagorodnyuk A. V. Metric Semigroups and Groups of Multisets // Res. Math.— 2024. — Vol. 32, № 3. — P. 12 – 25.
DOI: <https://doi.org/10.15421/242430>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85219050259?origin=resultslist>
2. Bihun V., Dolishniak D., Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. Subsymmetric Polynomials on Banach Spaces and Their Applications // Mathematics – 2025. – 13(22), 3693.
DOI: <https://doi.org/10.3390/math13223693>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105023129716?origin=resultslist>
3. Dolishniak D., Kravtsiv V. Subsymmetric Functions on Banach Spaces With Subsymmetric Bases // Carpathian Math. Publ. – 2026. – Vol. 18, № 1. — P. 49 – 66.
DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.18.1.49-66>
URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105033768287?origin=resultslist>

Список публікацій здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // International Workshop on Current Trends in Analysis and Approximation Theory (Rome, Italy, 18th July, 2023): book of abstracts — Rome, Italy. — 2023. — P. 45 – 48.
2. Daryna Dolishniak Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets // Міжнародна наукова конференція, присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 28–30 вересня)

- сня 2023 р.): тези допов. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т. — 2023. — С. 35 – 36.
3. Dolishniak D., Dolishniak P., Zagorodnyuk A. Nonlinear backward shifts on the ring of multisets // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.): тези допов. — Чернівці. — 2024. — С. 123.
 4. Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk, Pavlo Dolishniak Topological transitivity of a nonlinear backward shift // International Workshop on Modern Problems of Analysis, Optimization, Approximation and Their Applications (Rome, Italy, 25 – 27 June, 2025): book of abstracts. — Rome, Italy. — 2025. — P. 85 – 87.
 5. Vitaliy Bihun, Daryna Dolishniak, Andriy Zagorodnyuk Zeros of susymmetric polynomials on ℓ_p // XII International Skorobohatko Mathematical Conference (September 23-25): book of abstracts. — Lviv, Ukraine. — 2025. — P. 8.