

КАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КАРПАТСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТЕФАНІКА
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Пономарьов Ростислав Володимирович

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

**Алгебри симетричних аналітичних функцій на декартових
добутках банахових просторів**

Спеціальність 111 Математика

Галузь знань 11 Математика та статистика

Подається на здобуття ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело _____ Р.В. Пономарьов

Науковий керівник: Васишин Тарас Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор.

ІВАНО-ФРАНКІВСЬК — 2026

АНОТАЦІЯ

Пономарьов Р.В. Алгебри симетричних аналітичних функцій на декартових добутках банахових просторів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — Математика (з галузі знань 11 — Математика та статистика). — Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Міністерство освіти і науки України, Івано-Франківськ, 2026.

Метою дослідження є вивчення алгебр неперервних симетричних поліномів та цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартових добутках банахових просторів.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій автора та відомості про апробацію результатів дисертації.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, зосереджено увагу на науковій новизні одержаних результатів, відзначено теоретичне значення отриманих результатів та особистий внесок здобувача, наведено дані щодо апробації та публікацій результатів роботи.

В першому розділі розглянуто літературу, проведено її історичний аналіз, виписано вже відомі результати. Перший підрозділ першого розділу присвячений історичному розвитку досліджень алгебр симетричних аналітичних функцій на банахових просторах починаючи від класичних досліджень, які є початком функціонального аналізу і закінчуючи сучасними підходами. Другий підрозділ першого розділу містить формалізацію основних понять, тут викладено ключові означення, теореми й підходи, які формують структуру подальших дослідницьких кроків.

Другий розділ присвячено дослідженню алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом.

В підрозділі 2.1 побудовано множини елементарних симетричних поліномів $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}\}$ та $\{R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}\}$ на просторах $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ — декартовому добутку комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, та $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — декартовому добутку просторів дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, де $\mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$ це множина всіх мультиіндексів $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$, для яких виконується умова $\sum_{j=1}^n \frac{k_j}{p_j} \leq 1$, а поліноми $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})})} : L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})} \rightarrow \mathbb{K}$ визначені за допомогою рівності $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})})}((x_1; \dots; x_n)) = \int_0^1 (x_1(t))^{k_1} \cdot \dots \cdot (x_n(t))^{k_n} dt$, для $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, де $L_{p_i}^{(\mathbb{C})}$ це простір L_{p_i} . Досліджено властивості множини $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}\}$.

В підрозділі 2.2 доведено, що алгебраїчним базисом алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, у випадку $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ є множина елементарних симетричних поліномів $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}\}$.

Нарешті, в підрозділі 2.3 вставлено ізоморфізм між алгебрами комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ для $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ та алгеброю комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p'_1} \times L_{p'_2} \times \dots \times L_{p'_n}$ для довільних $p'_1, p'_2, \dots, p'_n \geq 1$. Скориставшись ізоморфічністю алгебр доведено, що алгебраїчний базис алгебри

комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, для довільних $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$ це множина елементарних симетричних поліномів $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$.

Третій розділ присвячено дослідженню зв'язків між алгебрами дійснозначних неперервних поліномів на дійсних банахових просторах та алгебрами комплекснозначних неперервних поліномів на комплексифікаціях цих просторів, що містять комплексні продовження елементів цих алгебр. Також отримані результати використано для дослідження алгебри симетричних неперервних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — декартовому добутку просторів дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом.

В підрозділі 3.1 побудовано алгебраїчний базис підалгебри алгебри дійснозначних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі E , для якої існує деяка підалгебра алгебри комплекснозначних неперервних поліномів на просторі \tilde{E} — комплексифікації простору E , яка має деякий алгебраїчний базис та містить комплексні продовження всіх елементів початкової підалгебри.

Результати підрозділу 3.1 використано в підрозділі 3.2, де у ролі простору E використано декартів добуток $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, а в ролі підалгебри — алгебру симетричних неперервних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Встановлено, що алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ це множина елементарних симетричних поліномів $\{R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$.

Четвертий розділ присвячено, по-перше, дослідженню алгебри цілих симетричних неперервних комплекснозначних функцій обмеженого типу

на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом. По-друге, побудові на довільному дійсному банаховому просторі деякого дійсного аналога алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексифікації цього простору, та дослідженню його властивостей. По-третє, побудові дійсного аналога алгебри цілих симетричних неперервних комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом.

В підрозділі 4.1 досліджено алгебру цілих симетричних неперервних комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, знайдено її спектр та доведено ізоморфізмію між цією алгеброю та алгеброю цілих функцій на деякому декартовому степеню простору \mathbb{C} .

В підрозділі 4.2 на довільному дійсному банаховому просторі X побудовано деякий дійсний аналог $A(X)$ алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексифікації простору X , породженої деякою скінченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів. Досліджено структуру елементів алгебри $A(X)$.

В підрозділі 4.3 застосовано конструкцію з підрозділу 4.2 для побудови алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ — дійсного аналога алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом побудованого на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — декартовому добутку дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом та було описано спектр алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$.

Нарешті, в підрозділі 4.4 встановлено ізоморфізм між алгеброю

$A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ —декартовому добутку дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом з попереднього підрозділу та алгеброю $A\left(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}\right)$ — дійсному аналогу алгебри цілих функцій на деякому декартовому степеню простору \mathbb{C} побудованому на просторі $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$, що є деяким декартовим степенем простору \mathbb{R} .

Ключові слова: поліном, ціла функція, аналітична/голоморфна функція, аналітична/голоморфна функція декількох комплексних змінних, симетричні поліноми, симетричні функції, алгебраїчний базис алгебри поліномів, функційний простір, банахів простір, банахів простір інтегровних за Лебегом функцій, алгебра Фреше, спектр алгебри.

ANNOTATION

Algebras of symmetric analytical functions on the Cartesian products of Banach spaces — Qualifying scientific work on rights of manuscript.

A Thesis for a Philosophy Doctor Degree in Mathematics, speciality 111 — Mathematics (field of knowledge 11 — Mathematics and statistics). — Vasyl Stefanyk Carpathian National University of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Ivano-Frankivsk, 2026.

The dissertation consists of an abstract, introduction, four sections and general conclusions, bibliography, and an appendix that contains the list of the author's publications and information on the approval of the dissertation's results.

The introduction justifies the relevance of the research topic, highlights the connection of the work with scientific programs, plans, and topics, and formulates the aim, object, subject, tasks, and research methods. It emphasises the scientific novelty of the obtained results, notes the theoretical significance of the results, and outlines the author's contribution. Additionally, the introduction provides information on the approval and publication of the results.

In the first chapter the literature is reviewed, a historical analysis is carried out, and already known results are stated. The first subsection of the first chapter is devoted to the historical development of research on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces, beginning with the classical studies that mark the origins of functional analysis and concluding with contemporary approaches. The second subsection of the first chapter contains the formalization of the basic notions; here the key definitions, theorems, and methods that shape the structure of subsequent research steps are presented.

The second chapter is devoted to the study of the algebra of complex-valued continuous symmetric polynomials on the Cartesian product $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ of complex Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable.

In Subsection 2.1 the sets of elementary symmetric polynomials $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ and $\{R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ are constructed on the spaces $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ — the Cartesian product of complex Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable — and $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — the Cartesian product of real Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable, where $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ is the set of all multi-indices $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$, for which the condition $\sum_{j=1}^n \frac{k_j}{p_j} \leq 1$ holds, and polynomials $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})})} : L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})} \rightarrow \mathbb{K}$ are defined by $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})})}((x_1; \dots; x_n)) = \int_0^1 (x_1(t))^{k_1} \cdot \dots \cdot (x_n(t))^{k_n} dt$, for $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, where $L_{p_i}^{(\mathbb{C})}$ is the space L_{p_i} . The properties of the set $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ are investigated.

In Subsection 2.2 it is proved that, in the case $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ the set of elementary symmetric polynomials $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ is an algebraic basis of the algebra of complex-valued continuous symmetric polynomials on the Cartesian product $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ of complex

Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable.

Finally, in Subsection 2.3 an isomorphism is established between the algebras of complex-valued continuous symmetric polynomials on the Cartesian product $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ for $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ and the algebra of complex-valued continuous symmetric polynomials on the Cartesian product $L_{p'_1} \times L_{p'_2} \times \dots \times L_{p'_n}$ for arbitrary $p'_1, p'_2, \dots, p'_n \geq 1$. Using the isomorphism of these algebras, it is shown that for arbitrary $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$ the algebraic basis of the algebra of complex-valued continuous symmetric polynomials on the Cartesian product $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ of complex Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable is the set of elementary symmetric polynomials $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$.

The third chapter is devoted to the study of relations between the algebras of real-valued continuous polynomials on real Banach spaces and the algebras of complex-valued continuous polynomials on the complexifications of those spaces, which contain the complex extensions of the elements of the real algebras. The obtained results are also used to study the algebra of symmetric continuous polynomials on the space $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — the Cartesian product of real Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable.

In Subsection 3.1 an algebraic basis of a subalgebra of the algebra of real-valued continuous polynomials on a real Banach space E is constructed, under the assumption that there exists a certain subalgebra of the algebra of complex-valued continuous polynomials on the space \tilde{E} — the complexification of E — which possesses an algebraic basis and contains the complex extensions of all elements of the original subalgebra.

The results of Subsection 3.1 are applied in Subsection 3.2, where the space E is taken to be the Cartesian product $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ of real Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue

integrable, and the subalgebra is the algebra of symmetric continuous polynomials on $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. It is established that the algebraic basis of the algebra of continuous symmetric polynomials on the Cartesian product $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ is the set of elementary symmetric polynomials $\left\{ R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n} \right\}$.

The fourth chapter is devoted, firstly, to the study of the algebra of entire symmetric continuous complex-valued functions of bounded type on the Cartesian product $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ of complex Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable. Secondly, to the construction on an arbitrary real Banach space of a certain real analogue of the algebra of entire functions of bounded type on the complexification of that space and the investigation of its properties. Thirdly, to the construction of a real analogue of the algebra of entire symmetric continuous complex-valued functions of bounded type on the Cartesian product $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ of complex Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable.

In Subsection 4.1 the algebra of entire symmetric continuous complex-valued functions of bounded type on the Cartesian product $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ of complex Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue is investigated, its spectrum is determined and an isomorphism between this algebra and the algebra of entire functions on a certain Cartesian power of the space \mathbb{C} is proved.

In Subsection 4.2, on an arbitrary real Banach space X a real analogue $A(X)$ of the algebra of entire functions of bounded type on the complexification of X that is generated by a finite set of algebraically independent homogeneous polynomials is constructed. The structure of the elements of the algebra $A(X)$ is investigated.

In Subsection 4.3 the construction from Subsection 4.2 is applied to construct the algebra $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ — a real analogue of the algebra of entire symmetric functions of bounded type on the Cartesian product $L_{p_1} \times$

$\dots \times L_{p_n}$ of complex Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable, constructed on the space $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — the Cartesian product of real Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable — and the spectrum of the algebra $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ is described.

Finally, in Subsection 4.4 an isomorphism is established between the algebra $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ on the space $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ — the Cartesian product of real Banach spaces of functions whose corresponding powers are absolutely Lebesgue integrable studied in the previous subsection — and the algebra $A\left(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}\right)$ — a real analogue of the algebra of entire functions on a certain Cartesian power \mathbb{C} constructed on the space $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$, which is a Cartesian power of \mathbb{R} .

Keywords: polynomial; entire function; analytic/holomorphic function; analytic/holomorphic functions of several complex variables; symmetric polynomials; symmetric functions; algebraic basis of an algebra of polynomials; function space; Banach space; Banach space of Lebesgue integrable functions; Fréchet algebra; spectrum of algebra.

Список публікацій здобувача, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

1. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions// Carpathian Math. Publ. 2025. Vol. 17, no. 2. P. 483–515.

DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.17.2.483-515>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105026233234?origin=result>

ISSN: 20759827

2. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Algebraic bases of some algebras of polynomials on Banach spaces// Mat. Stud. 2025. Vol. 64, no. 1. P. 85-95.

DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.64.1.81-91>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105017628811?origin=result>

ISSN: 10274634

3. Varvariuk M.M., Vasylyshyn T.V., Nykorovych I.I., Ponomarov R.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of real Banach spaces of absolutely summable sequences// Precarpathian bulletin of the Shevchenko Scientific Society 2025. Num. 20(76)-2025. P. 24 - 38.

DOI: [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20\(76\)-24-38](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-24-38)

URL: <https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/2067>

ISSN: 2304-7399.

4. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Spectra of algebras of symmetric analytic functions on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions // Res. Math.33(3). 2025. P. 88–112

DOI: <https://doi.org/10.15421/242530>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105032425341?origin=result>

ISSN: 26644991

Список публікацій здобувача, що підтверджують апробацію матеріалів дисертації

1. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions// V Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана(Чернівці, 23 - 27 вересня 2024): book of abstracts. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича 2024. P. 162.

URL:

<https://drive.google.com/file/d/1ZsaAWT1uYA3q5dPNDiFMhMTQUSuoeb/view>

2. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Algebras of symmetric polynomials on Cartesian products of real and complex Banach spaces of Lebesgue integrable functions// XII International Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv,

23-25 September 2025): book of abstracts Lviv: Lviv Polytechnic national university. 2025. P. 75.

URL: https://drive.google.com/file/d/1n5LOldKODFO8lJWDgsL_-EtgXDk0NzqW/view?usp=drive_link

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	16
ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕННЯ	25
1.1. Огляд літератури за тематикою дослідження	25
1.2. Попередні відомості	27
1.2.1. Мультилінійні відображення	28
1.2.2. Поліноми	28
1.2.3. Комплексифікація дійсного банахового простору	30
1.2.4. Алгебраїчний базис	32
1.2.5. Алгебра $H_b(X)$	33
1.2.6. Симетричні відображення	34
1.2.7. Алгебри $H_{b,S}(X)$ та $\mathcal{P}_S(X)$	34
1.2.8. Ізоморфізми алгебр Фреше цілих симетричних функцій	34
1.2.9. Простори вимірних за Лебегом функцій	35
1.2.10. Симетричні функції на $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$	36
1.2.11. Алгебри симетричних поліномів на просторі $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$.	37
РОЗДІЛ 2. Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом	39
2.1. Елементарні симетричні поліноми на декартових добутках банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом	39

2.2.	Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом у випадку $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$	49
2.3.	Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом для довільних $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$	76
РОЗДІЛ 3. Алгебраїчні базиси алгебр неперервних поліномів, заданих на дійсних банахових просторах		85
3.1.	Алгебраїчні базиси алгебр неперервних поліномів, заданих на дійсних банахових просторах, породжені алгебраїчними базисами алгебр неперервних поліномів на комплексифікаціях цих просторів	85
3.2.	Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом	92
РОЗДІЛ 4. Спектри та ізоморфізми деяких алгебр цілих функцій на банахових просторах		100
4.1.	Спектр алгебри цілих симетричних неперервних комплекснозначних функцій на декартовому добутку комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом	100
4.2.	Конструкція деякої алгебри $A(X)$ на дійсному банаховому просторі X , яка є аналогом алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі	102

4.3. Спектр алгебри $A(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})$, породженої симетричними
поліномами 115

4.4. Ізоморфізм між алгеброю $A(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})$ та алгеброю
 $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}|})$ 123

ВИСНОВКИ 129

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 132

ДОДАТКИ 140

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

\mathbb{Z}	множина цілих чисел.
\mathbb{Z}_+	множина невід'ємних цілих чисел.
\mathbb{C}	множина комплексних чисел.
$\mathcal{L}_a({}^m X; Y)$	лінійний простір всіх m -лінійних відображень $A : X^m \rightarrow Y$, де простори X та Y — банахові, а $m \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{L}({}^m X; Y)$	підпростір всіх неперервних елементів простору $\mathcal{L}_a({}^m X; Y)$.
$\mathcal{L}_a^s({}^m X; Y)$	підпростір всіх <i>симетричних</i> елементів простору $\mathcal{L}_a({}^m X; Y)$ де $m \in \mathbb{N}$, тобто таких $A \in \mathcal{L}_a({}^m X; Y)$, для яких виконується рівність

$$A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \dots, x_m)$$

для кожної бієкції $\sigma : \{1; \dots; m\} \rightarrow \{1; \dots; m\}$ та кожного набору $x_1, \dots, x_m \in X$.

\tilde{E}	комплексифікація дійсного банахового простору E .
\hat{P}	комплексне продовження дійснозначного полінома P .
$L_p^{(\mathbb{K})}$	для $p \in [1; +\infty)$, це банахів простір вимірних функцій $x : [0; 1] \rightarrow \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, для яких p -й степінь їхнього модуля інтегрований за Лебегом, тобто інтеграл $\int_0^1 x(t) ^p dt$ скінченний, з нормою

$$\|x\|_{L_p^{(\mathbb{K})}} = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$1_X : Y \rightarrow \{0; 1\}$ індикатор множини X у просторі Y , тобто функція яка діє з Y в множину $\{0; 1\}$, обертається на 1 в елементах

множини X і на 0 у всіх елементах простору Y які не є елементами множини X .

- $H_b(X)$ алгебра Фреше всіх цілих функцій $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, де X комплексний банахів простір, які обмежені на обмежених множинах, наділена топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.
- $H_{b,S}(X)$ підалгебра всіх S -симетричних елементів алгебри $H_b(X)$, де S це деяка напівгрупа відображень з X в X .
- $\mathcal{P}_S(X)$ підалгебра алгебри $H_{b,S}(X)$, яка складається з усіх S -симетричних неперервних поліномів на просторі X .
- $\mathcal{M}(A)$ спектр топологічної алгебри A , тобто множина всіх неперервних мультиплікативних лінійних нетривіальних функціоналів алгебри A .

ВСТУП

Актуальність теми.

Задача опису спектра топологічної алгебри є однією з найважливіших задач при роботі з цією алгеброю, оскільки, за допомогою перетворення Гельфанда, алгебра може бути подана як алгебра неперервних функцій на спектрі, наділеному відповідною топологією. Дослідження спектра алгебри Фреше $H_b(X)$ цілих функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X було розпочате в роботі Арона Р., Коула Б. та Гамеліна Т. [9]. Подальші дослідження проводилися багатьма авторами, зокрема Ароном Р., Галіндо Л., Гарсією Д., Маестре М., Карандо Д. та Дімантом В. [10–12]. Однак, повний явний опис спектра алгебри в загальному випадку поки що не був отриманий. З іншого боку, якщо підалгебра алгебри $H_b(X)$ містить як щільну підмножину деяку алгебру неперервних поліномів, наділену алгебраїчним базисом, тоді елементи спектра цієї підалгебри однозначно визначаються за допомогою їх значень на елементах алгебраїчного базису i , відповідно, задача опису спектра зводиться до задачі опису множини цих значень. Типовими прикладами такої підалгебри є алгебри Фреше цілих симетричних функцій обмеженого типу на банахових просторах послідовностей з симетричним базисом Шаудера та переставно-інваріантних банахових просторах вимірних за Лебегом функцій.

Як продемонстровано в роботі [38] (див. також роботи [20, 57, 66]), відповідні алгебри симетричних неперервних поліномів мають злічені алгебраїчні базиси у випадках $X = \ell_p$, та скінченні алгебраїчні базиси у випадках $X = L_p$, де $p \in [1, +\infty)$. Відзначимо, що у випадку алгебри симетричних функцій задача опису спектра далека від тривіальної. Повний опис спектра алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1 був поставлений як питання у 2003 році (див. роботу [2]), і після

серії результатів (роботи [7,8,37] рік) остаточно зроблений у 2024 році (див. роботу [13]).

Подібно до алгебр неперервних симетричних поліномів на вказаних вище просторах, алгебри неперервних симетричних поліномів на декартових добутках цих просторів мають не більш, ніж зліченні алгебраїчні бази-си (див. роботи [4,23,25] для просторів послідовностей та роботи [46–48,54] для просторів функцій).

Найбільш загальний підхід до визначення симетричних функцій на банахових просторах розроблено в роботі Арона Р, Галіндо П., Пінаско Д, Залдуендо, І. [3]. (див. також роботи [27–29])

Алгебри симетричних поліномів та цілих функцій обмеженого типу на банахових просторах мають численні застосування як у теоретичних, так і у практичних дослідженнях, особливо, у криптографії [16] (робота Чоп'юка Ю., Василичина Т., Загороднюка А.), машинному навчанні [67] (робота Загороднюка А., Базів Н., Чоп'юка Ю., Василичина Т., Буртняка В., Кравців В.) та статистичній квантовій фізиці [15,64] (роботи Чернеги І., Марцінків М., Василичина Т., Загороднюка А. та Гриніва Р., Кравців В., Василичина Т., Загороднюка А. відповідно). Більш загальні алгебри блочно-симетричних [24,49,66] (роботи Кравців В., Василичина Т., Загороднюка А., Гандери-Калиновської О.), слабо-симетричних [5,60] (роботи Буртняка В., Чоп'юка Ю., Василичин С., Василичина Т., Загороднюка А.) та суперсиметричних [65] (робота Чернеги І., Дмитришина Р., Кравців В., Василичина Т., Загороднюка А.) поліномів теж відіграють важливу роль у застосуваннях.

Крім того методи розроблені для алгебр симетричних функцій можуть бути поширені на більший клас алгебр функцій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Робота виконувалася в рамках науково-дослідної роботи кафедри матема-

тичного і функціонального аналізу Карпатського національного університету імені Василя Стефаника, зокрема в рамках проєктів «Алгебри симетричних і слабо симетричних функцій на банахових просторах» (реєстраційний номер 0125U000403, 2025 — 2027, керівник НДР Васишин Т.В.) та «Аналіз на спектрах зліченно породжених алгебр симетричних поліномів і можливі застосування у квантовій механіці та інформатиці» (реєстраційний номер проєкту 2023.03/0198, 2024 — 2026, керівник НДР Загороднюк А. В.).

Мета й завдання дослідження. *Метою дослідження є вивчення алгебр неперервних симетричних поліномів та цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартових добутках банахових просторів.*

Об'єктом дослідження є алгебри неперервних симетричних поліномів та цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартових добутках банахових просторів.

Предметом дослідження є властивості алгебр неперервних симетричних поліномів та цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартових добутках банахових просторів та їх спектри.

Завдання дослідження для досягнення поставленої мети було вирішено такі ключові завдання:

1. Побудувати алгебраїчний базис алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, для $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$;
2. Розробити метод побудови алгебраїчного базису підалгебри алгебри дійснозначних неперервних поліномів на довільному дійсному банаховому просторі за допомогою алгебраїчного базису деякої підалгебри алгебри неперервних комплекснозначних поліномів на комплексифікації цього простору;

3. Побудувати алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних дійснозначних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, для $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$;
4. Описати спектр алгебри Фреше цілих симетричних комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, та побудувати ізоморфізм між цією алгеброю Фреше та алгеброю цілих функцій на деякому степеню простору \mathbb{C} ;
5. Побудувати алгебру $A(X)$ для дійсного банахового простору X , яка є аналогом алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексифікації простору X , породженої деякою скінченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів та дослідити структуру елементів алгебри $A(X)$;
6. Описати спектр алгебри Фреше $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$, породженої симетричними поліномами, та побудувати ізоморфізм між цією алгеброю Фреше та алгеброю Фреше $A(X)$, де X це деякий декартів степені простору \mathbb{R} .

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених завдань використовуються сучасні методи функціонального аналізу, а також окремі ідеї, прийоми і підходи з робіт Немировського А., Семьонова С., Гонсалеса М., Гонсало Р. Хараміло А., Аленкара Р., Арона Р., Кравців В, Загороднюка А. та Василюшина Т.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі основні наукові результати, отримані в дисертації, є новими. У дисертаційній роботі вперше:

1. Побудовано множини елементарних симетричних поліномів на декартових добутках $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ та $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ комплексних та дій-

- сних, відповідно, банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, і досліджено їхні властивості;
2. Показано, що множина елементарних симетричних поліномів є алгебраїчним базисом алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, у випадку $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$;
 3. Показано, що множина елементарних симетричних поліномів є алгебраїчним базисом алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, для $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$;
 4. Побудовано алгебраїчний базис підалгебри алгебри дійснозначних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі E , для якої існує деяка підалгебра алгебри комплекснозначних неперервних поліномів на просторі \tilde{E} — комплексифікації простору E , яка має алгебраїчний базис та містить комплексні продовження всіх елементів початкової підалгебри;
 5. Показано, що множина елементарних симетричних поліномів є алгебраїчним базисом алгебри неперервних симетричних дійснозначних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом;
 6. Досліджено алгебру цілих симетричних комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, знайдено її спектр та доведено ізоморфність між цією алгеброю та алгеброю цілих функцій на деякому декартовому степеню простору \mathbb{C} ;

7. На дійсному банаховому просторі X побудовано алгебру $A(X)$ — аналог алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексифікації простору X , породженої деякою скінченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів та досліджено структуру елементів алгебри $A(X)$;
8. Побудовано алгебру $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ — дійсний аналог алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, та описано спектр алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$;
9. Встановлено ізоморфізм між алгеброю $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ та алгеброю $A(X)$, де X це деякий декартів степінь простору \mathbb{R} .

Практичне значення одержаних результатів. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають фундаментальний теоретичний характер, можуть бути корисними у функціональному аналізі та в статистичній квантовій фізиці для побудови інтегральних статистичних сум для ідеальних газів, що складаються із бозонів або ферміонів.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертації, що вносяться на захист, отримані автором самостійно. У спільних з науковим керівником публікаціях [70, 72, 73] співавтору належать постановка окремих задач і аналіз отриманих результатів. У публікації [71] здобувачу належить формулювання і доведення леми 3.1.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях та семінарах:

1. У міжнародній конференції, присвяченій 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана (23 – 27 вересня 2024 року, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича);

2. 12-й міжнародній математичній конференції імені Василя Яковича Скоробогатька (23–25 вересня 2025 року, Львівський Політехнічний національний університет).
3. Наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (2022 – 2026 роки).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в друкованих працях, серед яких: 3 статей ([70, 72, 73]), кожна з яких опублікована у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection, одна стаття 1 стаття у наукових видання України (категорії Б) ([71]); та 2 тези конференцій ([74, 75]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 143 сторінки. Список використаних джерел містить 71 найменування та займає 8 сторінок. Додаток займає 2 сторінки і включає список публікацій за темою дисертації та відомості про апробацію наведених у ній результатів.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ВИБІР НАПРЯМКІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Огляд літератури за тематикою дослідження

С. Банах в 1920 році описав аксіоми повного нормованого лінійного простору, який згодом почали називати банаховим. В 1923 році Н. Вінером було узагальнено інтегральну формулу Коші на випадок векторнозначних аналітичних функцій від однієї комплексної змінних і зберегти значну кількість результатів.

У 1932 році Р.С. Мартін побудував теорію аналітичних відображень на банахових просторах з використанням степеневих рядів [26].

В середині 1940-х років значний вклад було зроблено М.А. Цорном [30–32], а на початку 1950-х років - Себастьяно де Сілвою [33, 34].

Алгебри $H_b(X)$ - цілих аналітичних функцій обмеженого типу на просторі X почали вивчатися з точки зору їх структури як топологічних лінійних просторів в роботах середини 80-х початку 90-х років.

Питання продовжуваності полінома з деякого підпростору на ширший простір було поставлене у роботі Р. Арона та П. Бернера [42]. Проблема продовжуваності поліномів і полілінійних відображень з банахового простору також досліджувалася у роботах [43–45] та інших.

Вивчення спектрів алгебр аналітичних функцій обмеженого типу почалось з робіт Б. Коула, Т. Гамеліна [36] та Т. Корна, Б. Коула, Т. Гамеліна [35].

Симетричні функції на нескінченновимірних просторах були введені в роботі [38], як важливий інструмент в теорії рівномірного наближення неперервних функцій на сепарабельних гільбертових просторах гладкими функціями та конкретно поліномами. Загалом, якщо лінійний простір

має якусь симетричну структуру, природно розглядати набір операторів, що зберігають цю структуру та визначати симетричну функцію на цьому просторі як функцію, що не змінюється від застосування вищевказаних операторів до її аргумента [3]. Важливими прикладами таких просторів є переставно-інваріантні простори функцій (див. [69, означення 2.а.1, ст. 117]), наприклад, простори L_p (означення буде введено нижче). Як вказано в роботі [20], простори послідовностей з симетричним базисом Шаудера (див. [68, означення 3.а.1, ст. 113]), наприклад, простори ℓ_p абсолютно сумовних в степеню p послідовностей є переставно-інваріантними просторами функцій на множині \mathbb{N} . Симетричні неперервні поліноми на дійсних сепарабельних переставно-інваріантних просторах функцій були застосовані для дослідження задачі існування розділяючих поліномів на цих просторах в роботі [20]. Також у роботі [20] було побудовано не більш, ніж зліченні базиси алгебр симетричних неперервних поліномів на цих просторах. З аналогічного результату для комплексних просторів випливає, що відповідні топологічні алгебри аналітичних симетричних функцій на цих просторах або скінченно породжені, або зліченно породжені, що важливо для опису спектрів цих алгебр. Елементи ряду Тейлора цих функцій є алгебраїчними комбінаціями елементів алгебраїчного базису відповідної алгебри симетричних поліномів. Таким чином, кожний характер на такій алгебрі аналітичних симетричних функцій однозначно заданий його значеннями на елементах алгебраїчного базису. Цей підхід був вперше представлений у роботі [2] для дослідження спектра алгебри аналітичних симетричних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1 . Повний опис спектра цієї алгебри на просторі ℓ_1 було отримано в роботі [13] (див. також роботи [7, 8]). В неперервному випадку цей підхід був застосований у роботі [17] щоб описати спектр алгебри Фреше цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі L_∞ , що зробило можливим подати цю алгебру, як алгебру цілих функцій на її спектрі (див. роботу [19]). Деякі загальні результати на

спектрах зліченно породжених алгебр цілих функцій були отримані у роботах [21, 22].

Подібно до алгебр неперервних симетричних поліномів на вказаних вище просторах, алгебри неперервних симетричних поліномів на декартових добутках цих просторів мають не більш, ніж зліченні алгебраїчні бази-си (див. роботи [4, 23, 25] для просторів послідовностей та роботи [46–48, 54] для просторів функцій). Відзначимо, що природні групи симетрії на цих декартових добутках просторів задають деякі групи симетрії на самих просторах, що є підгрупами відповідних природних груп симетрії на цих просторах (див. роботу [49]). Функції, симетричні відносно таких груп називаються блочно-симетричними. Оскільки блочна симетричність є більш слабкою умовою ніж симетричність, з цього випливає, що у алгебрах блочно-симетричних поліномів та аналітичних функцій відповідні алгебри симетричних поліномів та аналітичних функцій є підалгебрами. Тоді, методи розроблені для алгебр симетричних функцій можуть бути поширені на більший клас алгебр функцій. Граничний випадок таких алгебр, це алгебри слабо симетричних функцій (див. роботу [51]).

1.2. Попередні відомості

У цьому розділі зробимо огляд відомих результатів за темою дисертації, які у цьому зв'язку виникають та будуть розглянуті у наступних розділах.

Множину натуральних чисел будемо називати \mathbb{N} , множину цілих чисел будемо називати \mathbb{Z} , множину цілих невід'ємних чисел будемо називати \mathbb{Z}_+ , множину дійсних чисел будемо називати \mathbb{R} , а множину комплексних чисел будемо називати \mathbb{C} .

Для кожного мультиіндекса $k = (k_1; \dots; k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ будемо визначати $|k|$ за допомогою рівності $|k| = k_1 + \dots + k_n$.

1.2.1. Мультилінійні відображення Для кожного $m \in \mathbb{N}$ будемо позначати $\mathcal{L}_a(mX; Y)$ лінійний простір всіх m -лінійних відображень $A : X^m \rightarrow Y$, де простори X та Y — банахові, з нормами $\|\cdot\|_X$ та $\|\cdot\|_Y$ відповідно. Також підпростір всіх неперервних елементів простору $\mathcal{L}_a(mX; Y)$ будемо позначати $\mathcal{L}(mX; Y)$.

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ будемо позначати $\mathcal{L}_a^s(mX; Y)$ підпростір всіх *симетричних* елементів простору $\mathcal{L}_a(mX; Y)$, тобто таких $A \in \mathcal{L}_a(mX; Y)$, для яких виконується рівність

$$A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}) = A(x_1, \dots, x_m)$$

для кожної бієкції $\sigma : \{1; \dots; m\} \rightarrow \{1; \dots; m\}$ та кожного набору $x_1, \dots, x_m \in X$.

Норму мультилінійного відображення $A \in \mathcal{L}_a(mX; Y)$ будемо визначати як

$$\|A\| = \sup_{\max_{j=1}^m \|x_j\|_X \leq 1} \|A(x_1, \dots, x_m)\|_Y. \quad (1.1)$$

Загальновідомо (див., напр., [39, с.2]), що мультилінійне відображення $A \in \mathcal{L}_a(mX; Y)$ неперервне тоді і тільки тоді, коли його норма скінченна.

1.2.2. Поліноми Відображення $P : X \rightarrow Y$, де простори X та Y є банаховими просторами з нормами $\|\cdot\|_X$ та $\|\cdot\|_Y$ відповідно, називається N -однорідним поліномом, де $N \in \mathbb{N}$, якщо існує N -лінійне відображення $A_P : X^N \rightarrow Y$ таке, що

$$P(x) = A_P(\underbrace{x, \dots, x}_N)$$

для кожного елемента $x \in X$. Відображення A_P будемо називати N -лінійним відображенням, асоційованого з поліномом P . Відмітимо, що існування такого відображення гарантує існування симетричного відображен-

ня, асоційованого з даним поліномом:

$$A_P^s(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Delta} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$$

для елементів $x_1, \dots, x_N \in X$, де множина Δ це набір всіх бієкцій $\sigma : \{1; \dots; N\} \rightarrow \{1; \dots; N\}$.

Відмітимо, що для N -однорідного полінома P симетричне N -лінійне відображення, асоційоване з даним поліномом, може бути знайдене за формулою наведеною нижче (див. [39, теорема 1.10]):

$$A_P^s(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{2^N N!} \sum_{j_k \in \{-1; 1\}} j_1 \cdot \dots \cdot j_N P(j_1 x_1 + \dots + j_N x_N), \quad (1.2)$$

де $k \in \{1; \dots; N\}$.

Будемо називати відображення $P : X \rightarrow Y$ 0 -однорідним поліномом, якщо це стале відображення.

Відображення $P : X \rightarrow Y$ називається поліномом степеня, не більшого за N , якщо його можна подати в формі

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_N, \quad (1.3)$$

де $P_j : X \rightarrow Y$ це j -однорідний поліном для кожного $j \in \{0, \dots; N\}$.

Загальновідомо (див., напр., [39, с. 2]), що поліном $P : X \rightarrow Y$ неперервний тоді і тільки тоді коли норма $\|P\|$ скінченна, де

$$\|P\| = \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|P(x)\|_Y.$$

Лема 1.1. (Див. [59, твердження 1]) Нехай $P : X \rightarrow Y$ це поліном степеня, не більшого за N , де X та Y — банахові простори над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Нехай $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ це набір попарно різних ненульових дійсних чисел. Тоді поліном P_j , визначений рівністю (1.3), можна знайти за допомогою рівності

$$P_j(x) = \sum_{s=0}^N w_{js} P(\lambda_s x)$$

для кожного числа $j \in \{0, \dots, N\}$ та елемента $x \in X$, де w_{js} це елементи матриці $W = (w_{js})_{j,s=\overline{0,N}}$, яка є оберненою до матриці Вандермонда $V_{\lambda_0, \dots, \lambda_N} = (\lambda_j^s)_{j,s=\overline{0,N}}$.

Нехай множина $\mathcal{P}_a(kX; Y)$ це лінійний простір k -однорідних поліномів, що діють з X в Y , а $\mathcal{P}(kX; Y)$ підпростір неперервних k -однорідних поліномів, що діють з X в Y . Узагальнюючи, $\mathcal{P}(X; Y)$ це простір неперервних поліномів що діють з X в Y . Відмітимо, що якщо Y це комутативна алгебра з одиницею, то $\mathcal{P}(X; Y)$ — теж комутативна алгебра з одиницею.

Відмітимо, що для неперервного m -однорідного полінома $P : X \rightarrow Y$ та симетричного мультілінійного відображення A_P , асоційованого з поліномом P , виконується нерівність

$$\|P\| \leq \|A_P\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\| \quad (1.4)$$

(див. [39, теорема 2.2]).

1.2.3. Комплексифікація дійсного банахового простору

Нехай E — дійсний банахів простір. Можемо поставити йому у відповідність наступний комплексний банахів простір \tilde{E} .

Означення 1.1. (Див. [63, с. 2]) Нехай простір \tilde{E} це декартів добуток $E \times E$, тоді \tilde{E} може бути перетворений на лінійний комплексний простір за допомогою задання двох операцій:

1. $(x; y) + (u; v) = (x + u; y + v)$ для всіх $x, y, u, v \in E$
2. $(\alpha + i\beta)(x; y) = (\alpha x - \beta y; \beta x + \alpha y)$ для всіх $x, y \in E$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

В подальшому будемо називати простір \tilde{E} комплексифікацією простору E .

Якщо ми поставимо у відповідність елементу $(x; 0) \in \tilde{E}$ елемент x за допомогою відображення, заданого рівністю

$$\phi(x + 0i) = x \quad (1.5)$$

для кожного $x \in E$, то простір E це дійсне ядро простору \tilde{E} . Тому ми можемо використовувати знайомий запис $z = x + iy$ замість $z = (x; y)$, а елементи $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$ визначаються однозначно.

Для $z = x + iy \in \tilde{E}$ будемо визначати спряжений до z як $\bar{z} = x - iy$.

Означення 1.2. (Див. [63, означення 1.1]) Якщо $\|\cdot\|_E$ це норма на дійсному банаховому просторі E , а $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ це довільна норма визначена на просторі \tilde{E} , тобто комплексифікації простору E , будемо казати, що $\|\cdot\|_{\tilde{E}}$ це природна норма комплексифікації якщо виконуються наступні дві умови:

1. $\|\operatorname{Re} z\|_{\tilde{E}} = \|\operatorname{Re} z\|_E$ для кожного $z \in \tilde{E}$,
2. $\|z\|_{\tilde{E}} = \|\bar{z}\|_{\tilde{E}}$ для кожного $z \in \tilde{E}$.

Відзначимо, що перша умова рівносильна умові $\|\operatorname{Im} z\|_{\tilde{E}} = \|\operatorname{Im} z\|_E$ для кожного $z \in \tilde{E}$. Із даних рівностей та повноти простору E випливає повнота простору \tilde{E} . Отже, \tilde{E} оснащений природною нормою комплексифікації є комплексним банаховим простором.

Відзначимо, що така норма завжди існує. Наприклад, норма Тейлора

$$\|x + it\|_T = \sup_{\|\psi\|_{E^*} \leq 1} \sqrt{\psi^2(x) + \psi^2(y)},$$

де ψ це дійснозначний лінійний неперервний функціонал, є природною нормою комплексифікації. До того ж, всі природні норми комплексифікації еквівалентні до $\|\cdot\|_T$ (див. [63, твердження 3]).

Теорема 1.1. (Див. [62, теорема 3]) Нехай $k \in \mathbb{N}$. Нехай E це банахів простір над полем \mathbb{R} . Для кожного полінома $P \in \mathcal{P}_a(kE; \mathbb{R})$ існує єдиний елемент $\hat{P} \in \mathcal{P}_a(k\tilde{E}; \mathbb{C})$ такий, що звуження полінома \hat{P} на простір E збігається з поліномом P . Поліном P неперервний тоді і тільки тоді, коли поліном \hat{P} неперервний.

Будемо називати поліном \hat{P} комплексним продовженням полінома P .

Теорема 1.2. (Див. [63, с. 9]) Нехай E це банахів простір над полем \mathbb{R} . Нехай $P : E \rightarrow \mathbb{R}$ це m -однорідний непервний поліном. Тоді його комплексне продовження \widehat{P} може бути знайдене за формулою:

$$\widehat{P}(x) = A_{\widehat{P}}(\underbrace{x, \dots, x}_m),$$

де $x \in \widetilde{E}$, а відображення $A_{\widehat{P}}$ можна знайти за формулою

$$A_{\widehat{P}}(x_1^{(0)} + ix_1^{(1)}, \dots, x_m^{(0)} + ix_m^{(1)}) = \sum_{j_k \in \{0;1\}} i^{\sum_{q=1}^m j_q} A_P(x_1^{(j_1)}, \dots, x_m^{(j_m)}),$$

де $k \in \{1; \dots; m\}$.

Згадуючи рівність (1.1), отримаємо нерівність

$$\|A_{\widehat{P}}\| \leq 2^m \|A_P\|. \quad (1.6)$$

Означення 1.3. Нехай E це банахів простір над полем \mathbb{R} . Для кожного полінома $P : E \rightarrow \mathbb{R}$ такого, що $P = P_0 + P_1 + \dots + P_m$, де P_j це j -однорідний поліном для $j \in \{0; \dots; m\}$, будемо визначати його комплексне продовження \widehat{P} як

$$\widehat{P} = \widehat{P}_0 + \widehat{P}_1 + \dots + \widehat{P}_m,$$

де поліноми \widehat{P}_j , $j \in \{1; \dots; m\}$, визначаються за допомогою теореми 1.1, а $\widehat{P}_0 = P_0$.

1.2.4. Алгебраїчний базис Нехай A це комутативна алгебра з одиницею над полем \mathbb{K} , де $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Для кожного полінома $Q : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ вигляду

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

де $\alpha_{(k_1, \dots, k_n)} \in \mathbb{K}$, а Ω це скінченна непорожня підмножина множини \mathbb{Z}_+^n ,

будемо визначати відображення $Q_A : A^n \rightarrow A$ за формулою:

$$Q_A(a_1, \dots, a_n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in \Omega} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}, \quad (1.7)$$

де $a_1, \dots, a_n \in A$ (будемо вважати, що нульовий степінь a_j^0 елемента a_j дорівнює одиниці алгебри A).

Означення 1.4. Нехай $a, a_1, \dots, a_n \in A$. Елемент a називається алгебраїчною комбінацією елементів a_1, \dots, a_n , якщо існує поліном $Q : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ такий, що $a = Q_A(a_1, \dots, a_n)$.

Означення 1.5. Непорожня множина $B \subset A$ називається системою твірних елементів алгебри A якщо кожний елемент алгебри A може бути поданий у вигляді алгебраїчної комбінації елементів множини B .

Означення 1.6. Непорожня множина $B \subset A$ називається алгебраїчним базисом алгебри A якщо кожний елемент алгебри A може бути поданий у вигляді алгебраїчної комбінації елементів множини B і, до того ж, єдиним чином.

Означення 1.7. Скінченна непорожня множина $\{a_1; \dots; a_n\} \subset A$ називається алгебраїчно незалежною, якщо рівність $Q_A(a_1, \dots, a_n) = 0$ можлива тільки тоді, коли поліном Q тотожно дорівнює 0. Нескінченна множина $A_0 \subset A$ називається алгебраїчно незалежною, якщо кожна її скінченна непорожня підмножина є алгебраїчно незалежною.

Кожний алгебраїчний базис алгебраїчно незалежний, а кожна алгебраїчно незалежна система твірних елементів є алгебраїчним базисом.

1.2.5. Алгебра $H_b(X)$ Нехай X це комплексний банахів простір. Нехай $H_b(X)$ це алгебра Фреше всіх цілих функцій $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, які обмежені на обмежених множинах, наділена топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Нехай

$$\|f\|_r = \sup_{\|x\| \leq r} |f(x)| \quad (1.8)$$

для функції $f \in H_b(X)$ та числа $r > 0$. Топологія $H_b(X)$ може бути породжена довільним набором норм $\{\|\cdot\|_r : r \in \Gamma\}$, де множина Γ це довільна необмежена підмножина множини $(0, +\infty)$.

Відзначимо, що на скінченновимірному комплексному банаховому просторі X кожна ціла функція обмежена на обмежених множинах. Тому виконується рівність

$$H_b(X) = H(X), \quad (1.9)$$

де $H(X)$ це алгебра Фреше всіх цілих функцій $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

1.2.6. Симетричні відображення Нехай A, B це довільні непорожні множини. Нехай S це деякий заданий набір відображень, які діють з множини A в цю ж множину. Відображення $f : A \rightarrow B$ називається S -симетричним, якщо $f(s(a)) = f(a)$ для всіх $a \in A$ та $s \in S$.

1.2.7. Алгебри $H_{b,S}(X)$ та $\mathcal{P}_S(X)$ Нехай X це комплексний банахів простір. Нехай S це множина операторів на просторі X . Позначимо $H_{b,S}(X)$ підалгебру всіх S -симетричних елементів алгебри $H_b(X)$. Згідно з [50, лема 3], алгебра $H_{b,S}(X)$ замкнена в алгебрі $H_b(X)$. Тож, $H_{b,S}(X)$ це алгебра Фреше. Будемо позначати $\mathcal{P}_S(X)$ підалгебру алгебри $H_{b,S}(X)$, яка складається з усіх S -симетричних неперервних поліномів на просторі X .

1.2.8. Ізоморфізми алгебр Фреше цілих симетричних функцій Наведену нижче теорему можна отримати з результатів [58, теорема 2] для пункту а) та [57, теорема 4] для пунктів б) та с):

Теорема 1.3. *Нехай X та Y це комплексні банахові простори. Нехай S_1 та S_2 це напівгрупи операторів на просторах X та Y відповідно. Нехай $\iota_{X,Y} : X \rightarrow Y$ це ізоморфізм такий, що виконуються наступні дві умови:*

1) *для кожних елемента $x \in X$ та оператора $s_1 \in S_1$ існує оператор $s_2 \in S_2$ такий, що виконується рівність $\iota_{X,Y}(s_1(x)) = s_2(\iota_{X,Y}(x))$;*

2) *для кожних елемента $y \in Y$ та оператора $s_2 \in S_2$ існує оператор $s_1 \in S_1$ такий, що виконується рівність $\iota_{X,Y}^{-1}(s_2(y)) = s_1(\iota_{X,Y}^{-1}(y))$.*

Тоді

a) відображення

$$I : f \in H_{b,S_2}(Y) \mapsto f \circ \iota_{X,Y} \in H_{b,S_1}(X) \quad (1.10)$$

це ізоморфізм, тобто I це неперервна лінійна мультиплікативна бієкція;

b) звуження відображення I на $\mathcal{P}_{S_2}(Y)$ це ізоморфізм між алгебрами $\mathcal{P}_{S_2}(Y)$ та $\mathcal{P}_{S_1}(X)$;

c) якщо алгебра $\mathcal{P}_{S_2}(Y)$ має якийсь алгебраїчний базис B , тоді множина $I(B)$ це алгебраїчний базис в алгебрі $\mathcal{P}_{S_1}(X)$.

1.2.9. Простори вимірних за Лебегом функцій Будемо визначати просту функцію як вимірну суму $\sum_k a_k 1_{E_k}$, де a_k це комплексні числа, множини E_k вимірні і мають порожні попарні перетини, а функції 1_{E_k} — це індикатори.

Простір $L_p^{(\mathbb{K})}$ для $p \in [1; +\infty)$ це банахів простір вимірних за Лебегом функцій $x : [0; 1] \rightarrow \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, для яких p -й степінь їхнього модуля інтегровний за Лебегом, тобто інтеграл $\int_0^1 |x(t)|^p dt$ скінченний, з нормою

$$\|x\|_{L_p^{(\mathbb{K})}} = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.11)$$

Простір $L_\infty^{(\mathbb{K})}$ це банахів простір суттєво обмежених вимірних за Лебегом функцій, $x : [0; 1] \rightarrow \mathbb{K}$, де $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, з нормою

$$\|x\|_{L_\infty^{(\mathbb{K})}} = \text{ess sup}_{t \in [0,1]} |x(t)|.$$

Визначимо норму на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times L_{p_2}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})}$, де $p_1; p_2; \dots; p_n \in [1; +\infty)$, як

$$\|x\|_{L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times L_{p_2}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})}} = \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \|x_j\|_{L_{p_j}^{(\mathbb{K})}} \quad (1.12)$$

для кожного $x = (x_1; \dots; x_n) \in L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times L_{p_2}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})}$.

В подальшому для зручності запису будемо позначати простір $L_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times L_{p_2}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{C})}$ просто L , а простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times L_{p_2}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ будемо позначати

$L^{(\mathbb{R})}$, тобто:

$$L = L_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times L_{p_2}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{C})} \quad (1.13)$$

та

$$L^{(\mathbb{R})} = L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times L_{p_2}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}. \quad (1.14)$$

Крім того, будемо позначати простір $L_p^{(\mathbb{C})}$ як L_p .

1.2.10. Симетричні функції на $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ Розглянемо $p_1, \dots, p_n \in [1; +\infty) \cup \{+\infty\}$. Нехай $\Xi_{[0;1]}$ це множина всіх бієкцій $\sigma : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ таких, що обидві функції σ та σ^{-1} є вимірними і зберігають міру Лебега, тобто, виконується рівність

$$\mu(\sigma(E)) = \mu(\sigma^{-1}(E)) = \mu(E)$$

для кожної вимірної за Лебегом множини $E \subset [0; 1]$, де μ це міра Лебега. Для кожної функції $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ та елемента $x = (x_1; \dots; x_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ введемо позначення

$$x \circ \sigma = (x_1 \circ \sigma; \dots; x_n \circ \sigma).$$

Для кожної функції $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ будемо визначати оператор g_σ наступним чином:

$$g_\sigma : x \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \mapsto x \circ \sigma \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}. \quad (1.15)$$

Нехай

$$G_{p_1; \dots; p_n} = \{g_\sigma : \sigma \in \Xi[0; 1]\}. \quad (1.16)$$

Легко побачити, що множина $G_{p_1; \dots; p_n}$ це група операторів на просторі $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. В подальшій роботі ми будемо називати $G_{p_1; \dots; p_n}$ -симетричні функції $f : L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ просто симетричними, тобто функція $f : L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ називається симетричною, якщо рівність

$$f(x) = f(x \circ \sigma)$$

виконується для кожного елемента $x \in L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ та функції $\sigma \in \Xi[0; 1]$.

1.2.11. Алгебри симетричних поліномів на просторі
 $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$

Теорема 1.4. (Див [46, теорема 2.10]) Для кожного числа $p \in [1; +\infty)$, кожен m -однорідний симетричний неперервний поліном $P : L_p^n \rightarrow \mathbb{C}$, де норма на просторі L_p^n задана рівністю

$$\|x\|_{p,n} = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|_{L_p}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.17)$$

може бути єдиним чином поданий як алгебраїчна комбінація елементів множини

$$\left\{ R_\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ такий, що } 1 \leq |\alpha| \leq \min(m, \lfloor p \rfloor) \right\},$$

де поліноми R_α задані рівністю

$$R_\alpha(x) = \int_0^1 (x_1(t))^{\alpha_1} \dots (x_n(t))^{\alpha_n} dt,$$

для мультиіндексів $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Лема 1.2. (Див. [24, лема 11]). Нехай $m \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{C}^m$ та оператор $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^{m-1}$ це ортогональна проєкція: $\chi((x_1; x_2; \dots; x_m)) = (x_2; x_3; \dots; x_m)$. Нехай множина $G_1 = \chi(G)$ така, що $\text{int } G_1 \neq \emptyset$ і для будь-якої відкритої множини $U \subset G_1$, її прообраз $\chi^{-1}(U)$ необмежений. Якщо комплексзначний поліном $Q(x_1; x_2; \dots; x_m)$ обмежений на G , то поліном Q не залежить від змінної x_1 .

Лема 1.3. (Див. [52, теорема 3]). Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує число $K_n > 0$, таке, що для кожного відображення $c : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ такого, що виконується нерівність

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c(k)|^{\frac{1}{|k|}} < \infty,$$

існує елемент $x_c = (x_1; \dots; x_n) \in L_\infty^n$ такий, що рівність

$$\int_0^1 x_1^{k_1}(t) x_2^{k_2}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}(t) dt = c(k)$$

виконується для всіх мультиіндексів $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$, та виконується нерівність

$$\|x_c\|_{L_\infty^n} \leq K_n \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c(k)|^{\frac{1}{|k|}}.$$

З теореми [50, теорема 4], випливає наступне твердження:

Теорема 1.5. *Нехай X це комплексний банахів простір, $m \in \mathbb{N}$ та $\Gamma = \{P_1; P_2; \dots; P_m\}$ це множина поліномів на просторі X з наступними властивостями:*

1. *Для кожного числа $j \in \{1, \dots, m\}$ відображення $P_j : X \rightarrow \mathbb{C}$ є неперервним d_j -однорідним поліномом, де $d_j \in \mathbb{N}$.*
2. *Існує константа $C > 0$ така, що для кожного вектора $z = (z_1; \dots; z_m) \in \mathbb{C}^m$ існує елемент $x_z \in X$ такий, що $\|x_z\| \leq C \|z\|_\infty$ та $P_j(x_z) = z_j$ для всіх $j \in \{1; \dots; m\}$, де $\|z\|_\infty = \max\{|z_1|; \dots; |z_m|\}$.*

Нехай множина $H_\Gamma(X)$ це замкнена підалгебра алгебри Фреше $H_b(X)$, наділена властивістю:

3. *Довільна функція $f \in H_b(X)$ належить множині $H_\Gamma(X)$ тоді і тільки тоді, коли кожний член ряду Тейлора функції f є алгебраїчною комбінацією елементів множини Γ .*

Тоді виконуються наступні умови:

- (а) *існує неперервний ізоморфізм ξ між алгебрами Фреше $H_\Gamma(X)$ та $H(\mathbb{C}^m)$ такий, що для всіх чисел $j \in \{1; \dots; m\}$ функція $\xi(P_j)$ це координатний функціонал, тобто, $\xi(P_j)(z) = z_j$ для всіх $z = (z_1; \dots; z_m) \in \mathbb{C}^m$.*
- (б) *спектр алгебри Фреше $H_\Gamma(X)$ збігається з множиною всіх функціоналів обчислення значень в точках простору X .*

Лема 1.4. *(Див. [50, лема 3]) Нехай X це комплексний банахів простір. Нехай деяка послідовність функцій $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset H_b(X)$ збігається до якоїсь функції $f \in H_b(X)$. Нехай $A : X \rightarrow X$ це деяке відображення. Якщо знайдеться елемент $x \in X$, такий що $f_n(A(x)) = f_n(x)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, тоді $f(A(x)) = f(x)$.*

РОЗДІЛ 2. Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом

В роботі Т.В. Василюшина [46] вже знайдено алгебраїчний базис алгебри симетричних неперервних поліномів, заданих на декартовому степеню $(L_p)^n$ комплексного банахового простору L_p функцій на відрізку $[0; 1]$, p -й степінь яких абсолютно інтегровний за Лебегом. Мета цього розділу — узагальнити цей результат на випадок алгебри симетричних неперервних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, де $p_1, \dots, p_n \geq 1$ не обов'язково рівні числа.

2.1. Елементарні симетричні поліноми на декартових добутках банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом

Мета цього підрозділу — встановити деякі властивості функцій на декартових добутках комплексних просторів функцій, інтегровних за Лебегом, та побудувати множини так званих елементарних симетричних поліномів $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ та $\{R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ і визначити властивості першої з них. В подальших підрозділах даного розділу та в розділі 3 буде доведено, що ці множини є алгебраїчними базисами алгебр симетричних неперервних поліномів, заданих на декартових добутках $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ і $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ комплексних та дійсних, відповідно, банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, де $p_1, \dots, p_n \geq 1$.

Зафіксуємо числа $p_1; p_2; \dots; p_n \geq 1$. Нехай $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ — декартовий добуток просторів $L_{p_1}, L_{p_2}, \dots, L_{p_n}$, наділений нормою (1.12).

Спочатку, доведемо декілька лем.

Лема 2.1. *Нехай $a > 1$ та $a > b > 0$. Тоді існує дійсне число $\lambda \in (0; 1)$ таке, що $\lambda a > 1 > \lambda b$.*

Доведення. Візьмемо число ε таке, що виконується нерівність $0 < \varepsilon < \min(\frac{a-1}{a}; \frac{a-b}{ab})$. Нехай $\lambda = \frac{1}{a} + \varepsilon$. Перевіримо, що таке λ задовольняє всім умовам. По-перше, виконуються нерівності $\lambda < \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a} = 1$ та $\lambda > \frac{1}{a} > 0$. Тоді, $\lambda \in (0; 1)$. По-друге, виконується рівність $\lambda a = 1 + a\varepsilon > 1$. Тоді $\lambda a > 1$. По-третє, виконується нерівність $\lambda b = \frac{b}{a} + b\varepsilon < \frac{b}{a} + \frac{a-b}{a} = 1$. Тоді $1 > \lambda b$. Отже, $\lambda a > 1 > \lambda b$. Лему доведено. \square

Лема 2.2. *Підпростір L_∞^n щільний в просторі $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ за нормою (1.12).*

Доведення. Нехай $x = (x_1; \dots; x_n) \in L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$. Оскільки $x_i \in L_{p_i}$, а $L_{p_i} \subset L_1$ для всіх $p_i \geq 1$, то $x_i \in L_1$. Відповідно, функції x_i інтегровні за Лебегом на відрізку $[0; 1]$ для всіх $i \in \{1; \dots; n\}$. Тоді, для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$ та $\varepsilon > 0$, існує вимірна функція $y_i : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ така, що множина образів $y_i([0; 1])$ не потужніша за зліченну та нерівність $|x_i(t) - y_i(t)| < \varepsilon$ виконується для всіх $t \in [0; 1]$. Відмітимо, що функція $y_i \in L_{p_i}$. Нехай $y = (y_1; \dots; y_n)$. Тоді

$$\begin{aligned} \|x - y\|_{L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}} &= \max_{i \in \{1; \dots; n\}} \|x_i - y_i\|_{L_{p_i}} \\ &= \max_{i \in \{1; \dots; n\}} \left(\int_0^1 |x_i(t) - y_i(t)|^{p_i} dt \right)^{\frac{1}{p_i}} < \max_{i \in \{1; \dots; n\}} \left(\int_0^1 \varepsilon^{p_i} dt \right)^{\frac{1}{p_i}} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Оскільки $y_i \in L_{p_i}$, а множина значень $y_i([0; 1])$ не потужніша за зліченну, існує вимірна функція зі скінченною кількістю значень $y_i^{(0)} : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ така, що виконується нерівність $\|y_i^{(0)} - y_i\|_{L_{p_i}} < \varepsilon$. Нехай $y^{(0)} = (y_1^{(0)}; \dots; y_n^{(0)})$.

Тоді

$$\|y^{(0)} - y\|_{L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}} = \max_{i \in \{1; \dots; n\}} \|y_i^{(0)} - y_i\|_{L_{p_i}} < \varepsilon. \quad (2.2)$$

Відмітимо, що $y_i^{(0)} \in L_\infty$ для всіх $i \in \{1; \dots; n\}$. Тоді $y^{(0)} \in L_\infty^n$. Отже, посилаючись на нерівності (2.1) та (2.2), отримуємо нерівність

$$\|x - y^{(0)}\|_{L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}} < 2\varepsilon. \quad (2.3)$$

Таким чином, для всіх функцій $x \in L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ та $\varepsilon > 0$ існує функція $y^{(0)} \in L_\infty^n$, таке що нерівність (2.3) виконується. Тоді підпростір L_∞^n щільний в $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$. Лему доведено. \square

Лема 2.3. Нехай $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує число $K_n > 0$ таке, що для кожного відображення $c : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$, для якого виконується нерівність

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c(k)|^{\frac{1}{|k|}} < \infty,$$

існує функція $x_c = (x_{1;c}; \dots; x_{n;c}) \in L_\infty^n$ така, що виконуються наступні властивості:

1. $\int_0^1 x_{1;c}^{k_1}(t) x_{2;c}^{k_2}(t) \cdot \dots \cdot x_{n;c}^{k_n}(t) dt = c(k)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$
2. $x_{i;c}(t) = 0$ для всіх $t \in [0; \frac{1}{2})$ та $i \in \{1; 2; \dots; n\}$
3. $\|x_c\|_{L_\infty^n} \leq 2K_n \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c(k)|^{\frac{1}{|k|}}$.

Доведення. Позначимо через K_n число, яке дає лема 1.3. Нехай $c' : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ це відображення, задане рівністю $c'(k) = 2c(k)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$. По-перше, згідно з лемою 1.3, існує функція $u_{c'} = (u_{1;c'}; \dots; u_{n;c'}) \in L_\infty^n$ така, що рівність

$$\int_0^1 u_{1;c'}^{k_1}(t) u_{2;c'}^{k_2}(t) \cdot \dots \cdot u_{n;c'}^{k_n}(t) dt = c'(k) \quad (2.4)$$

виконується для всіх $k = (k_1; \dots; k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$, а також виконується нерівність

$$\|u_{c'}\|_{L_\infty^n} \leq K_n \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c'(k)|^{\frac{1}{|k|}}. \quad (2.5)$$

Нехай

$$x_{i;c}(t) = \begin{cases} u_{i;c'}(2t - 1), & \text{якщо } t \in [\frac{1}{2}; 1], \\ 0, & \text{якщо } t \in [0; \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (2.6)$$

для всіх $i \in \{1; \dots; n\}$. Нехай $x_c = (x_{1;c}; \dots; x_{n;c})$. Відзначимо, що $x_c \in L_\infty^n$, а також, що виконується нерівність

$$\|x_c\|_{L_\infty^n} \leq \|u_{c'}\|_{L_\infty^n}. \quad (2.7)$$

Доведемо, що функція x_c задовольняє всім властивостям. Доведемо властивість 1. Із рівності (2.6), для всіх $(k_1; \dots; k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$, випливає рівність

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_{1;c}^{k_1}(t) x_{2;c}^{k_2}(t) \cdot \dots \cdot x_{n;c}^{k_n}(t) dt &= \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 u_{1;c}^{k_1}(2t-1) u_{2;c}^{k_2}(2t-1) \cdot \dots \cdot u_{n;c}^{k_n}(2t-1) dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Нехай $s = 2t - 1$. Тоді, з рівності (2.5), випливає рівність

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 u_{1;c}^{k_1}(2t-1) u_{2;c}^{k_2}(2t-1) \cdot \dots \cdot u_{n;c}^{k_n}(2t-1) dt &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 u_{1;c}^{k_1}(s) u_{2;c}^{k_2}(s) \cdot \dots \cdot u_{n;c}^{k_n}(s) ds \\ &= \frac{1}{2} c'(k) = c(k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Із рівностей (2.8) та (2.9), випливає рівність

$$\int_0^1 x_{1;c}^{k_1}(t) x_{2;c}^{k_2}(t) \cdot \dots \cdot x_{n;c}^{k_n}(t) dt = c(k)$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$. Отже, властивість 1 доведена.

Властивість 2 відразу випливає з рівності (2.6).

Доведемо властивість 3. З нерівностей (2.7) та (2.5), згадуючи про рівність $c'(k) = 2c(k)$ та нерівність $|k| \geq 1$, можна отримати нерівності

$$\begin{aligned} \|x_c\|_{L_\infty^n} \leq \|u_{c'}\|_{L_\infty^n} &\leq K_n \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c'(k)|^{\frac{1}{|k|}} \leq \\ &\leq 2K_n \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c(k)|^{\frac{1}{|k|}}. \end{aligned}$$

Отже, властивість 3 доведена. Таким чином, лему доведено. \square

Для кожного мультиіндексу $\alpha = (k_1; k_2; \dots; k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$ будемо визначати відповідну суму $S_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ за формулою:

$$S_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p_i}. \quad (2.10)$$

Якщо простір $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ відразу зрозумілий з контексту, то суму $S_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ будемо позначати просто S_α . Позначимо

$$\aleph_{p_1; \dots; p_n} = \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\} : S_\alpha \leq 1\}. \quad (2.11)$$

Для кожного мультиіндексу $\alpha = (k_1; k_2; \dots; k_n) \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$ визначимо поліноми $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})})} : L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})} \rightarrow \mathbb{K}$ за допомогою рівності

$$R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{K})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{K})})}((x_1; \dots; x_n)) = \int_0^1 (x_1(t))^{k_1} \cdot \dots \cdot (x_n(t))^{k_n} dt, \quad (2.12)$$

де $x_i \in L_{p_i}^{(\mathbb{K})}$ для всіх $i \in \{1; \dots; n\}$, а простір $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Якщо $k_i = 0$ та $x_i \equiv 0$ ми будемо вважати, що $x_i^{k_i}$ дорівнює 1. В цьому розділі ми сфокусуємося на комплексних поліномах і просторах, і для зручності будемо позначати поліном $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{C})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{C})})}$ як $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$.

Відзначимо, що $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ це $(k_1 + \dots + k_n)$ -однорідний поліном. В роботі [46, теорема 2.10] вже доведено, що у випадку $p_1 = \dots = p_n$ ці поліноми визначені тоді і тільки тоді, коли $S_\alpha \leq 1$. В теоремі 2.2 ми узагальнимо цей результат на довільні $p_1, \dots, p_n \in [1; +\infty)$. В теоремі 2.4 буде показано, що для кожного мультиіндекса $\beta \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$, такого що $\beta \notin \aleph_{p_1; \dots; p_n}$ відповідний поліном $R_\beta^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ не визначений.

В роботі [46, теорема 2.10] була визначена структура симетричних непервних поліномів на просторі L_p^n , наділених нормою (1.17) де $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in L_p^n$. За визначеннями (1.12) та (1.17), виконується подвійна нерівність

$$\|x\|_{L_p^n} \leq \|x\|_{p,n} \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_{L_p^n}.$$

Тобто норми (1.12) та (1.17) є еквівалентними на просторі L_p^n . Тоді, посилюючись на теорему 1.4 отримаємо наступне:

Теорема 2.1. Для будь-якого числа $p \in [1; +\infty)$, будь-який m -однорідний симетричний неперервний поліном $P : L_p^n \rightarrow \mathbb{C}$, де простір L_p^n наділений нормою (1.12), може бути поданий як алгебраїчна комбінація елементів множини

$$\left\{ R_\alpha^{(L_p^n)} : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ такий, що } 1 \leq |\alpha| \leq \min(m, \lfloor p \rfloor) \right\}.$$

Теорема 2.2. Нехай $\alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$, де множина $\mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$ задана за допомогою рівності (2.11). Поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$, заданий рівністю (2.12), визначений, неперервний та $\|R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}} = 1$.

Доведення. Нехай $\alpha = (k_1; \dots; k_n)$. Нехай $x = (x_1; \dots; x_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Доведемо, що поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x)$ визначений. З рівності (2.11), $\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p_i} \leq 1$. Тому

$$k_1 p_2 \dots p_n + k_2 p_1 p_3 \dots p_n + \dots + k_n p_1 p_2 \dots p_{n-1} \leq \prod_{i=1}^n p_i.$$

Тоді $s \geq 0$, де

$$s = \prod_{i=1}^n p_i - (k_1 p_2 \dots p_n + k_2 p_1 p_3 \dots p_n + \dots + k_n p_1 p_2 \dots p_{n-1}). \quad (2.13)$$

Вагова нерівність Коші стверджує, що для кожного $r \in \mathbb{N}$, наборів невід'ємних чисел $a_1; \dots; a_r$ та невід'ємних ваг $w_1; \dots; w_r$ таких, що $w = w_1 + \dots + w_r > 0$,

$$(a_1^{w_1} \cdot \dots \cdot a_r^{w_r})^{\frac{1}{w}} \leq \frac{a_1 w_1 + \dots + a_r w_r}{w}.$$

(Вважаємо, що $0^0 = 1$). Використаємо цю нерівність для $r = n+1$ та набору

$$a_1 = |x_1(t)|^{p_1},$$

$$a_2 = |x_2(t)|^{p_2},$$

...

$$a_n = |x_n(t)|^{p_n},$$

$$a_{n+1} = 1,$$

де $t \in [0; 1]$, з вагами

$$w_1 = k_1 p_2 \dots p_n,$$

$$w_2 = k_2 p_1 p_3 \dots p_n,$$

...

$$w_n = k_n p_1 p_2 \dots p_{n-1},$$

$$w_{n+1} = s,$$

де число s задане рівністю (2.13). Отримаємо наступну нерівність:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^n |x_i(t)|^{k_i \prod_{i=1}^n p_i} \right)^{\frac{1}{\prod_{i=1}^n p_i}} &\leq \\ &\leq \frac{k_1 p_2 \dots p_n |x_1(t)|^{p_1} + \dots + k_n p_1 p_2 \dots p_{n-1} |x_n(t)|^{p_n} + s}{\prod_{i=1}^n p_i} \end{aligned}$$

для кожного $t \in [0; 1]$. Тоді

$$\prod_{i=1}^n |x_i(t)|^{k_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p_i} |x_i(t)|^{p_i} + \frac{s}{\prod_{i=1}^n p_i} \quad (2.14)$$

для кожного $t \in [0; 1]$. Оскільки $x_i \in L_{p_i}$, права сторона нерівності (2.14) інтегровна. Отже, ліва сторона нерівності (2.14) інтегровна. Отже, враховуючи рівність (2.12), поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ визначений. Більш того, якщо $\|x_i\|_{L_{p_i}} \leq 1$ для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$, тоді $\int_0^1 |x_i(t)|^{p_i} dt \leq 1$ і, з нерівності (2.14) та рівності (2.13), отримаємо нерівність

$$R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x) \leq \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p_i} + \frac{s}{\prod_{i=1}^n p_i} = 1.$$

Отже,

$$\|R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}} \leq 1. \quad (2.15)$$

Таким чином, поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ обмежений, а значить неперервний.

Доведемо, що

$$\|R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}} = 1. \quad (2.16)$$

Нехай $y_i(t) = 1$ для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$ та кожного $t \in [0; 1]$. Нехай $y = (y_1; \dots; y_n)$. Відзначимо, що тоді $y \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ і $\|y\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}} = 1$. Крім того, виконується рівність $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(y) = 1$. Отже,

$$\|R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}} \geq 1. \quad (2.17)$$

Враховуючи нерівності (2.15) та (2.17), отримуємо рівність (2.16). Теорему доведено. \square

Теорема 2.3. *Нехай $\alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$, де множина $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ задана рівністю (2.11). Поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$, заданий рівністю (2.12), симетричний.*

Доведення. Нехай $\alpha = (k_1; \dots; k_n)$. Доведемо, що для кожних відображення $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ та функції $x \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$, виконується рівність

$$R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x) = R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x \circ \sigma).$$

Припустимо, що існує таке відображення $\sigma_0 \in \Xi_{[0;1]}$ та функція $x = (x_1; \dots; x_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ для яких

$$R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x) \neq R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x \circ \sigma_0).$$

Оберемо довільне дійсне число ε , яке задовольняє нерівності

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \left| R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x) - R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x \circ \sigma_0) \right|.$$

За теоремою 2.2, поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ визначений. Тоді, з рівності (2.12), функція $t \in [0; 1] \mapsto x_1^{k_1}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}(t)$ є інтегрованою за Лебегом. Отже, існує вимірна функція $u : [0; 1] \rightarrow \mathbb{C}$ така, що множина всіх її значень $u([0; 1])$ не більш ніж зліченна, та рівність

$$|x_1^{k_1}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}(t) - u(t)| < \varepsilon \quad (2.18)$$

виконується майже скрізь на відрізку $[0; 1]$. Отже, виконується нерівність

$$\left| R_{\alpha}^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x) - \int_0^1 u(t) dt \right| < \varepsilon \quad (2.19)$$

З нерівності (2.18) випливає, що

$$\left| x_1^{k_1}(\sigma_0(t)) \cdot \dots \cdot x_n^{k_n}(\sigma_0(t)) - u(\sigma_0(t)) \right| < \varepsilon$$

майже скрізь на відрізку $[0; 1]$. Отже, маємо нерівність

$$\left| R_{\alpha}^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x \circ \sigma_0) - \int_0^1 u(\sigma_0(t)) dt \right| < \varepsilon. \quad (2.20)$$

Доведемо рівність

$$\int_0^1 u(\sigma_0(t)) dt = \int_0^1 u(t) dt. \quad (2.21)$$

Оскільки u це вимірна за Лебегом функція, така що множина її значень $u([0; 1])$ не більш ніж зліченна, існує послідовність комплексних чисел $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ і послідовність множин з попарно порожніми перетинами $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$, що є вимірними підмножинами відрізка $[0; 1]$ такі, що рівність

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 1_{E_j}(t)$$

виконується для кожного $t \in [0; 1]$, де функції $1_{E_1}, 1_{E_2}, \dots$ це індикатори. Нехай $v_r(t) = \sum_{j=1}^r a_j 1_{E_j}(t)$. Оскільки послідовності $\{v_r\}_{r=1}^{\infty}$ та $\{v_r \circ \sigma_0\}_{r=1}^{\infty}$ збігаються поточково до функцій u та $u \circ \sigma_0$ відповідно, з теореми Лебега про мажоровану збіжність, виконуються рівності

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 v_r(t) dt = \int_0^1 u(t) dt \quad \text{та} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^1 v_r(\sigma_0(t)) dt = \int_0^1 u(\sigma_0(t)) dt. \quad (2.22)$$

Доведемо, що рівність

$$\int_0^1 v_j(\sigma_0(t)) dt = \int_0^1 v_j(t) dt \quad (2.23)$$

виконується для кожного $j \in \mathbb{N}$. Достатньо довести, що рівність

$$\int_0^1 1_{E_j}(t) dt = \int_0^1 1_{E_j}(\sigma(t)) dt$$

виконується для всіх $j \in \mathbb{N}$. Оскільки функція 1_{E_j} є індикатором, а $\sigma_0 \in \Xi_{[0;1]}$, маємо рівність

$$\int_0^1 1_{E_j}(t) dt = \mu(E_j) = \mu(\sigma_0(E_j)) = \int_0^1 1_{E_j}(\sigma_0(t)) dt.$$

Тоді, рівність (2.23) доведена. Посилаючись на рівності (2.22) та (2.23), отримуємо рівність (2.21). Тепер, посилаючись на нерівність (2.19), рівність (2.21) та нерівність (2.20), отримуємо нерівність

$$\left| R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x) - R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x \circ \sigma_0) \right| < 2\varepsilon.$$

Це вступає в пряме протиріччя з нашим вибором ε . Отже, для кожного відображення $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ та функції $x \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$, виконується рівність

$$R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x) = R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}(x \circ \sigma).$$

Таким чином, поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ є симетричним. Теорему доведено. \square

Теорема 2.4. Для кожного мультиіндексу $\beta = (q_1; \dots; q_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$ такого, що $\beta \notin \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$, де множина $\mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$ задана рівністю (2.11), існує функція $x = (x_1; \dots; x_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ така, що $\int_0^1 x_1^{q_1}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{q_n}(t) dt = \infty$.

Доведення. З рівності (2.10), $S_\beta = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i}$. Оскільки $\beta \notin \mathfrak{N}_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}}$, маємо нерівність $S_\beta > 1$. Нехай

$$x_i(t) = t^{-\frac{1}{p_i} + \frac{S_\beta - 1}{n(q_i + 1)}} \quad (2.24)$$

для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$ та $t \in [0; 1]$. Тоді рівність

$$|x_i(t)|^{p_i} = t^{-1 + \frac{p_i(S_\beta - 1)}{n(q_i + 1)}}$$

виконується для кожних $t \in [0; 1]$ та $i \in \{1; \dots; n\}$. Відзначимо, що виконується нерівність

$$-1 + \frac{p_i(S_\beta - 1)}{n(q_i + 1)} > -1.$$

Таким чином, $x_i \in L_{p_i}$ для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$. Отже, $x = (x_1; \dots; x_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$.

З рівності (2.24),

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_1^{q_1}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{q_n}(t) dt &= \int_0^1 t^{-\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(S_\beta - 1)}{n(q_i + 1)}} dt > \\ &> \int_0^1 t^{-\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{(q_i + 1)(S_\beta - 1)}{n(q_i + 1)}} dt = \int_0^1 t^{-\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} + \sum_{i=1}^n \frac{(S_\beta - 1)}{n}} dt = \\ &= \int_0^1 t^{-S_\beta + S_\beta - 1} dt = \int_0^1 t^{-1} dt = \infty. \end{aligned}$$

Теорему доведено. \square

2.2. Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, у випадку $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$

Мета цього підрозділу — довести, що множина елементарних симетричних поліномів $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}\}$ визначених за допомогою рівності (2.12), де множина $\mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$ визначена за допомогою рівності (2.11), є алгебраїчним базисом алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом у випадку $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$.

В даному підрозділі будемо вважати, що в нас впорядкований набір чисел

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1. \quad (2.25)$$

Нехай

$$L = L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}. \quad (2.26)$$

Для всіх q_1, q_2 таких, що $1 \leq q_1 \leq q_2 \leq \infty$ загальновідомо, що

$$L_{q_2} \subset L_{q_1} \text{ та } \|x\|_{L_{q_1}} \leq \|x\|_{L_{q_2}} \text{ для кожного } x \in L_{q_2}. \quad (2.27)$$

Отже,

$$L_\infty^n \subset L_{p_1}^n \subset L \quad (2.28)$$

та

$$\|x\|_{L_{p_1}^n} \geq \|x\|_L \quad (2.29)$$

для кожного $x \in L_{p_1}^n$.

Лема 2.4. *Звуження на простір $L_{p_1}^n$ будь-якого m -однорідного неперервного симетричного полінома $P : L \rightarrow \mathbb{C}$ також є m -однорідним неперервним симетричним поліномом.*

Доведення. Легко зрозуміти, що це звуження є m -однорідним симетричним поліномом. Доведемо його неперервність. Розглянемо довільну послідовність $\{x_j\}_{j=1}^\infty \subset L_{p_1}^n$, яка збігається до $x \in L_{p_1}^n$. З твердження (2.28), всі $x_j \in L$ та $x \in L$. Доведемо, що послідовність $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ збігається до x в просторі L . Припустимо, що послідовність $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ не збігається до x в просторі L . Тоді існує $\delta > 0$ таке, що $\|x - x_j\|_L > \delta$ для нескінченної кількості різних j . З нерівності (2.29), $\|x - x_j\|_{L_{p_1}^n} \geq \|x - x_j\|_L > \delta$. Отже, послідовність $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ не збігається до x в просторі $L_{p_1}^n$. Це суперечить нашому припущенню. Отже, послідовність $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ збігається до x в просторі L . Отже, згадуючи про неперервність полінома P , послідовність $\{P(x_j)\}_{j=1}^\infty$ збігається до $P(x)$. Отже, звуження полінома P на $L_{p_1}^n$ є неперервним. Лему доведено. \square

Для $m \in \mathbb{N}$ побудуємо

$$\mathfrak{N}_L^{(m)} = \{\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}, 1 \leq |\alpha| \leq \min(m, \lfloor p_1 \rfloor)\}. \quad (2.30)$$

Лема 2.5. *Звуження симетричного неперервного m -однорідного полінома $P : L \rightarrow \mathbb{C}$ на простір $L_{p_1}^n$ може бути однозначно подане як алгебраїчна комбінація елементів множини*

$$\{R_\alpha^{(L_{p_1}^n)} : \alpha \in \mathfrak{N}_L^{(m)}\}, \quad (2.31)$$

де поліном $R_\alpha^{(L_{p_1}^n)}$ заданий рівністю (2.12), а множина $\aleph_L^{(m)}$ задана рівністю (2.30).

Доведення. Нехай P_1 це звуження полінома P на $L_{p_1}^n$. З леми 2.4, поліном P_1 це m -однорідний симетричний неперервний поліном. Згідно з теоремою 2.1, поліном P_1 може бути єдиним чином поданий у вигляді алгебраїчної комбінації елементів множини

$$\left\{ R_\alpha^{(L_{p_1}^n)} : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ таких, що } 1 \leq |\alpha| \leq \min(m, \lfloor p_1 \rfloor) \right\}.$$

Враховуючи означення (2.30), ця множина збігається з множиною (2.31).

Лемі доведено. \square

Відзначимо, що множина $\aleph_L^{(m)}$ є скінченною. Для кожного $\alpha = (k_1; \dots; k_n) \in \aleph_L^{(m)}$ та $i \in \{1; \dots; n\}$, виконується нерівність

$$m \geq k_i. \quad (2.32)$$

Введемо порядок на множині $\aleph_L^{(m)}$. Для мультиіндексів $\beta = (k_{\beta;1}; \dots; k_{\beta;n})$ та $\alpha = (k_{\alpha;1}; \dots; k_{\alpha;n}) \in \aleph_L^{(m)}$ будемо казати, що

$$\beta > \alpha \quad (2.33)$$

якщо одна з умов нижче виконується:

1. $S_\beta > S_\alpha$, де S_β та S_α задані рівністю (2.10).
2. $S_\beta = S_\alpha$, а також існує таке $t \in \{1; \dots; n\}$, що для кожного $l \in \{1; \dots; t-1\}$, виконується рівність $k_{\beta;l} = k_{\alpha;l}$, а також виконується нерівність $k_{\beta;t} < k_{\alpha;t}$, тобто β стоїть перед α в лексикографічному порядку.

Наведемо приклад нерівності між мультиіндексами.

Приклад 2.1. Нехай $m = 7$, $n = 2$, $p_1 = 6$, $p_2 = 4$, $\alpha = (3; 2)$, $\beta = (6; 0)$; $\gamma = (5; 0)$. З рівності (2.30), $\alpha, \beta, \gamma \in \aleph_{L_6 \times L_4}^{(7)}$. Відзначимо, що $S_\alpha = 1$; $S_\beta = 1$; $S_\gamma = \frac{5}{6}$. З умови 2, $\alpha > \beta$. З умови 1, $\beta > \gamma$.

Лема 2.6. Відношення (2.33) задає строгий лінійний порядок на множині $\aleph_L^{(m)}$.

Доведення. Нехай $\alpha = (k_{\alpha;1}; \dots; k_{\alpha;n})$, $\beta = (k_{\beta;1}; \dots; k_{\beta;n})$, $\gamma = (k_{\gamma;1}; \dots; k_{\gamma;n}) \in \aleph_L^{(m)}$.

Доведемо іррефлексивність відношення (2.33). Припустимо, що $\alpha > \alpha$. Тоді одна з умов — перша чи друга повинна виконуватися. Якщо виконується перша умова, тоді $S_\alpha > S_\alpha$, що відразу неможливо. Якщо виконується друга умова, то повинно існувати таке число $t \in \{1; \dots; n\}$, що $k_{\alpha;t} < k_{\alpha;t}$, що теж відразу неможливо. Тоді наше початкове припущення неможливо. Отже, відношення іррефлексивне.

Доведемо асиметричність відношення (2.33). Припустимо, що $\beta > \alpha$ та $\alpha > \beta$. Тоді для обох нерівностей повинна виконуватися або перша, або друга умова. Тоді $S_\beta \geq S_\alpha$ та $S_\alpha \geq S_\beta$. Отже, $S_\alpha = S_\beta$. Таким чином, для обох нерівностей повинна виконуватися друга умова. Отже, оскільки $\beta > \alpha$, повинно існувати таке $t \in \{1; \dots; n\}$, що для кожного $l \in \{1; \dots; t-1\}$, $k_{\beta;l} = k_{\alpha;l}$ та $k_{\beta;t} < k_{\alpha;t}$. Таким чином, не існує таких $t_1 \in \{1; \dots; n\}$, що для кожного $l_1 \in \{1; \dots; t_1-1\}$, $k_{\beta;l_1} = k_{\alpha;l_1}$ та $k_{\beta;t_1} > k_{\alpha;t_1}$. Отже, для нерівності $\alpha > \beta$ друга умова не виконується. Таким чином, наше початкове припущення неможливо. Отже, відношення асиметричне.

Доведемо транзитивність відношення (2.33). Нехай для трійки мультиіндексів виконуються умови $\alpha > \beta$ і $\beta > \gamma$. Тоді $S_\alpha \geq S_\beta \geq S_\gamma$. Можливі два варіанти: $S_\alpha > S_\gamma$ та $S_\alpha = S_\beta = S_\gamma$. Розглянемо варіант $S_\alpha > S_\gamma$. Тоді $\alpha > \gamma$ за першою умовою. Розглянемо варіант $S_\alpha = S_\beta = S_\gamma$. Тоді існує таке $t_1 \in \{1; \dots; n\}$, що для кожного $l_1 \in \{1; \dots; t_1-1\}$, $k_{\alpha;l_1} = k_{\beta;l_1}$ та $k_{\alpha;t_1} < k_{\beta;t_1}$. Крім того, існує таке $t_2 \in \{1; \dots; n\}$, що для кожного $l_2 \in \{1; \dots; t_2-1\}$, $k_{\beta;l_2} = k_{\gamma;l_2}$ та $k_{\beta;t_2} < k_{\gamma;t_2}$. Нехай $t = \min(t_1; t_2)$. Тоді для кожного $l \in \{1; \dots; t-1\}$, виконується рівність $k_{\gamma;l} = k_{\beta;l} = k_{\alpha;l}$ та нерівність $k_{\gamma;t} > k_{\alpha;t}$. Отже, друга умова виконується, а тоді, $\alpha > \gamma$.

Транзитивність відношення доведена.

Доведемо, що можна порівняти будь-які два елементи. Припустимо, що мультиіндекси α, β такі, що $\alpha \neq \beta$. Покажемо, що або $\alpha > \beta$ або $\beta > \alpha$. Можливі три варіанти: $S_\alpha > S_\beta$, $S_\alpha < S_\beta$ та $S_\alpha = S_\beta$. В першому випадку $\alpha > \beta$ за першою умовою. В другому випадку $\alpha < \beta$ за першою умовою. Розглянемо випадок $S_\alpha = S_\beta$. Оскільки $\alpha \neq \beta$, існує таке $j \in \{1; \dots; n\}$, що $k_{\alpha;j} \neq k_{\beta;j}$. Нехай

$$t = \min\{j \in \{1; \dots; n\} : k_{\alpha;j} \neq k_{\beta;j}\}.$$

Тоді для кожного $l \in \{1; \dots; t-1\}$, $k_{\beta;l} = k_{\alpha;l}$ та $k_{\beta;t} \neq k_{\alpha;t}$. Якщо $k_{\beta;t} > k_{\alpha;t}$, то $\alpha > \beta$ за другою умовою. Якщо $k_{\beta;t} < k_{\alpha;t}$, то $\alpha < \beta$ за другою умовою. Таким чином, ці елементи можна порівняти.

Таким чином, це відношення задає строгий лінійний порядок. \square

Нехай q це кількість елементів в множині $\aleph_L^{(m)}$, тобто

$$q = |\aleph_L^{(m)}|. \quad (2.34)$$

Пронумеруємо всі елементи множини $\aleph_L^{(m)}$ в порядку спадання використовуючи відношення (2.33), яке за лемою 2.6 задає строгий лінійний порядок:

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_q. \quad (2.35)$$

З означення (2.33),

$$S_{\alpha_k} \leq S_{\alpha_l} \text{ для кожних } k, l \in \{1; \dots; q\} \text{ таких, що } k \geq l. \quad (2.36)$$

Лема 2.7. *Найменший елемент α_q в множині $\aleph_L^{(m)}$ це $(1; 0; \dots; 0)$.*

Доведення. Покажемо, що кожний елемент $\beta = (k_{\beta;1}; \dots; k_{\beta;n}) \in \aleph_L^{(m)}$ такий, що $\beta \neq (1; 0; \dots; 0)$, більший за $(1; 0; \dots; 0)$. Можливі два випадки:

1. Існує таке $j \in \{2; \dots; n\}$, що $k_{\beta;j} \neq 0$.
2. Для кожного $j \in \{2; \dots; n\}$, $k_{\beta;j} = 0$.

Розглянемо спочатку другий варіант. З рівності (2.10),

$$S_\beta = \frac{k_{\beta;1}}{p_1}, \quad (2.37)$$

оскільки $k_{\beta;j} = 0$ для кожного $j \in \{2; \dots; n\}$, тобто $\beta = (k_{\beta;1}; 0; \dots; 0)$. Покажемо, що $k_{\beta;1} > 1$. З означення (2.30) зрозуміло, що $\beta \neq (0; \dots; 0)$. Отже, $k_{\beta;1} \neq 0$. За припущенням, $\beta \neq (1; 0; \dots; 0)$. Таким чином, $k_{\beta;1} \neq 1$. Отже, $k_{\beta;1} > 1$. Таким чином, з рівності (2.37), $S_\beta > \frac{1}{p_1}$. З рівності (2.10), $S_{(1; \dots; 0)} = \frac{1}{p_1}$. Отже, $S_\beta > S_{(1; \dots; 0)}$. Таким чином, $\beta > (1; 0; \dots; 0)$ за першою умовою.

Розглянемо перший випадок. Оскільки існує таке $j \in \{2; \dots; n\}$, що $k_{\beta;j} \neq 0$, то

$$\frac{k_{\beta;j}}{p_j} \geq \frac{1}{p_j}.$$

З рівності (2.10),

$$S_\beta \geq \frac{k_{\beta;j}}{p_j}$$

та

$$\frac{1}{p_1} = S_{(1; 0; \dots; 0)}.$$

З означення (2.25),

$$\frac{1}{p_j} \geq \frac{1}{p_1}.$$

Таким чином можна виписати

$$S_\beta \geq \frac{k_{\beta;j}}{p_j} \geq \frac{1}{p_j} \geq \frac{1}{p_1} = S_{(1; 0; \dots; 0)}.$$

Тоді цей випадок можна розділити на два випадки:

1.1. $S_\beta > S_{(1; 0; \dots; 0)}$.

1.2. $S_\beta = S_{(1; 0; \dots; 0)}$.

Розглянемо випадок 1.1. Тоді $\beta > (1; 0; \dots; 0)$ за умовою 1. Розглянемо випадок 1.2. В цьому випадку виконуються рівності

$$S_\beta = \frac{k_{\beta;j}}{p_j} = \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p_1} = S_{(1; 0; \dots; 0)},$$

отже, з рівностей $S_\beta = \frac{k_{\beta;j}}{p_j}$ та (2.10), випливає, що $k_{\beta;1} = 0$. Таким чином, $k_{\beta;1}$ менше за перший індекс мультиіндекса $(1, 0, \dots, 0)$. Тоді $\beta > (1; 0; \dots; 0)$ за другою умовою.

Тоді $\beta > (1; 0; \dots; 0)$ в кожному з можливих варіантів. \square

Визначимо відображення $\eta : L_{p_1}^n \rightarrow \mathbb{C}^q$ рівністю

$$\eta(x) = \left(R_{\alpha_1}^{(L_{p_1}^n)}(x); \dots; R_{\alpha_q}^{(L_{p_1}^n)}(x) \right) \quad (2.38)$$

для кожного $x \in L_{p_1}^n$, де q, α_j та $R_{\alpha_j}^{(L_{p_1}^n)}$ задані означеннями (2.34), (2.35) та (2.12) відповідно.

Лема 2.8. *Нехай $P : L \rightarrow \mathbb{C}$ це t -однорідний симетричний неперервний поліном. Нехай P_1 це звуження полінома P на простір $L_{p_1}^n$. Тоді існує поліном $Q : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}$ такий, що $Q(\eta(x)) = P_1(x)$ для кожного $x \in L_{p_1}^n$, де відображення η задане рівністю (2.38).*

Доведення. Згідно з лемою 2.5, беручи до уваги порядок (2.35), поліном P_1 це алгебраїчна комбінація деяких поліномів $R_{\alpha_1}^{(L_{p_1}^n)}; \dots; R_{\alpha_q}^{(L_{p_1}^n)}$. Тоді, за означенням алгебраїчної комбінації, існує такий поліном $Q : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}$, що

$$Q\left(R_{\alpha_1}^{(L_{p_1}^n)}(x); \dots; R_{\alpha_q}^{(L_{p_1}^n)}(x)\right) = P_1(x)$$

для кожного $x \in L_{p_1}^n$. Отже, згадуючи означення (2.38), $Q(\eta(x)) = P_1(x)$ для кожного $x \in L_{p_1}^n$. \square

Наша мета — довести, що $Q(\eta(x))$ не залежить від декількох перших змінних, для яких відповідні суми S_α більші за 1. Доведемо це твердження в два кроки.

Лема 2.9. *Нехай $t \in \mathbb{N}$. Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $r < q$, де q задане рівністю (2.34). Нехай*

$$\alpha_j = (k_{\alpha_j;1}; \dots; k_{\alpha_j;n}) \in \mathfrak{N}_L^{(m)}, \quad j \in \{r+1; \dots; q\}, \quad (2.39)$$

визначено за допомогою порядку (2.35). Нехай $S_{\alpha_{r+1}} > 1$, де S_α визначено за допомогою рівності (2.10). Тоді існує таке $C_1 > 0$, що для кожного $C_2 > 0$ існує $(u_1; u_2; \dots; u_n) \in L_{p_1}^n$ таке, що наступні умови виконуються:

1. $u_i(t) = 0$ для кожного $t \in [\frac{1}{2}; 1]$ та $i \in \{1; 2; \dots; n\}$;
2. $\|u_i\|_{L_{p_i}} < C_1$ для кожного $i \in \{1; 2; \dots; n\}$;
3. $\left| R_{\alpha_j}^{(L_{p_1}^n)}((u_1; \dots; u_n)) \right| < C_1$ для кожного $j \in \{r+2; r+3; \dots; q\}$;
4. $\left| R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}((u_1; \dots; u_n)) \right| > C_2$.

Доведення. Нехай

$$l = \min(j \in \{1; \dots; q-r-1\} : S_{\alpha_{r+1}} > S_{\alpha_{r+j+1}}).$$

Таке l існує, оскільки $S_{\alpha_q} = \frac{1}{p_1} < 1$ за лемою 2.7 та рівністю (2.10), тоді як $S_{\alpha_{r+1}} > 1$ за умовами нашої леми. Отже,

$$S_{\alpha_{r+1}} = S_{\alpha_{r+j}}, \quad j \in \{1; \dots; l\}, \quad (2.40)$$

та

$$S_{\alpha_{r+1}} > S_{\alpha_{r+l+1}}.$$

З рівності (2.10), $S_{\alpha_{r+l+1}} > 0$. Тоді, за лемою 2.1, існує таке λ , $0 < \lambda < 1$, що

$$\lambda S_{\alpha_{r+1}} > 1 > \lambda S_{\alpha_{r+l+1}}. \quad (2.41)$$

Нехай

$$x_i(t) = \begin{cases} t^{-\frac{\lambda}{p_i} + \delta_i}, & \text{для } t \neq 0, \\ 0, & \text{для } t = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

для кожних $i \in \{1; 2; \dots; n\}$, $\delta_i > 0$ та $t \in [0; 1]$. Покажемо, що $x_i \in L_{p_i}$.

Відзначимо, що

$$\|x_i\|_{L_{p_i}} = \left(\int_0^1 \left(t^{-\frac{\lambda}{p_i} + \delta_i} \right)^{p_i} dt \right)^{\frac{1}{p_i}} = \left(\int_0^1 t^{-\lambda + \delta_i p_i} dt \right)^{\frac{1}{p_i}} < \infty,$$

оскільки $-\lambda + \delta_i p_i > -1$. Таким чином,

$$x_i \in L_{p_i}. \quad (2.43)$$

Відзначимо, що рівність

$$\begin{aligned} x_1^{k_{\alpha_j;1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_j;n}}(t) &= t^{-\frac{\lambda k_{\alpha_j;1}}{p_1} + \delta_1 k_{\alpha_j;1}} \cdot \dots \cdot t^{-\frac{\lambda k_{\alpha_j;n}}{p_n} + \delta_n k_{\alpha_j;n}} = \\ &= t^{-\lambda S_{\alpha_j} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_j;i}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

де мультиіндекс $(k_{\alpha_j;1}; \dots; k_{\alpha_j;n})$ визначений за допомогою позначення (2.39), виконується для кожних $j \in \{1; \dots; q\}$ та $t \in (0; 1]$.

Нехай $f \in \mathbb{N}$ таке, що

$$r + l + 1 \leq r + f \leq q.$$

Покажемо, що для довільного набору $\delta_1 > 0, \dots, \delta_n > 0$,

$$\int_0^1 x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt < \infty, \quad (2.45)$$

де $(k_{\alpha_{r+f};1}; \dots; k_{\alpha_{r+f};n}) = \alpha_{r+f}$. З рівності (2.44),

$$\int_0^1 x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt = \int_0^1 t^{-\lambda S_{\alpha_{r+f}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i}} dt. \quad (2.46)$$

Із нерівності (2.36), $S_{\alpha_{r+f}} \leq S_{\alpha_{r+l+1}}$ оскільки $r + l + 1 \leq r + f$. Таким чином, згадуючи, що $\lambda > 0$, виконується нерівність

$$-\lambda S_{\alpha_{r+f}} \geq -\lambda S_{\alpha_{r+l+1}}.$$

Отже,

$$-\lambda S_{\alpha_{r+f}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} \geq -\lambda S_{\alpha_{r+l+1}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i}. \quad (2.47)$$

З нерівності (2.41), $\lambda S_{\alpha_{r+l+1}} < 1$. Отже,

$$-\lambda S_{\alpha_{r+l+1}} > -1.$$

Для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$ виконуються нерівності $\delta_i > 0$ та $k_{\alpha_{r+f};i} \geq 0$,

таким чином,

$$\sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} \geq 0.$$

З останніх двох нерівностей випливає нерівність

$$-\lambda S_{\alpha_{r+l+1}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} > -1. \quad (2.48)$$

З нерівностей (2.47) та (2.48), випливає, що

$$-\lambda S_{\alpha_{r+f}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} > -1.$$

Отже, інтеграл (2.46) скінченний.

Покажемо, що існує такий набір $\delta_1 > 0, \dots, \delta_n > 0$, що наступні n умов задовольняються:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+1};i} &= \lambda S_{\alpha_{r+1}} - 1; \\ 2) \delta_1 &> m \sum_{i=2}^n \delta_i; \\ 3) \delta_2 &> m \sum_{i=3}^n \delta_i; \\ &\dots \\ n) \delta_{n-1} &> m \delta_n. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Візьмемо довільне число $\phi_n > 0$. Припустимо, ми вже визначили всі числа ϕ_j для $j \in \{s+1; \dots; n\}$ для деякого $s \in \{1; \dots; n-1\}$. Оберемо ϕ_s таким чином, що

$$\phi_s > m \sum_{i=s+1}^n \phi_i. \quad (2.50)$$

Так можна побудувати набір ϕ_j , де $j \in \{s; \dots; n\}$. Тобто, ми можемо побудувати набір $\phi_1; \dots; \phi_n$ такий, що для кожного $s \in \{1; \dots; n-1\}$ нерівність (2.50) виконується. Нехай

$$\delta_i = \gamma \phi_i$$

для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$, де

$$\gamma = \frac{\lambda S_{\alpha_{r+1}} - 1}{\sum_{i=1}^n \phi_i k_{\alpha_{r+1};i}}.$$

Тоді виконуються рівності

$$\sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+1};i} = \gamma \sum_{i=1}^n \phi_i k_{\alpha_{r+1};i} = \lambda S_{\alpha_{r+1}} - 1,$$

тобто перша умова з переліку (2.49) задовольняється. З нерівності (2.50), умова номер j з переліку (2.49) для кожного $j \in \{2; \dots; n\}$ задовольняється, бо

$$\delta_{j-1} = \gamma \phi_{j-1} > \gamma m \sum_{i=j}^n \phi_i = m \sum_{i=j}^n \gamma \phi_i = m \sum_{i=j}^n \delta_i.$$

Зафіксуємо набір $\delta_1 > 0, \dots, \delta_n > 0$ який задовольняє переліку умов (2.49). З рівності (2.44) та першої умови з переліку (2.49) випливає рівність

$$x_1^{k_{\alpha_{r+1};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+1};n}}(t) = t^{-1}, \quad (2.51)$$

для кожного $t \in (0; 1]$.

Нехай $f \in \mathbb{N}$ таке, що виконується нерівність

$$r + 1 < r + f < r + l + 1. \quad (2.52)$$

Покажемо, що виконується нерівність

$$\int_0^1 x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt < \infty, \quad (2.53)$$

де $(k_{\alpha_{r+f};1}; \dots; k_{\alpha_{r+f};n}) = \alpha_{r+f}$. З рівностей (2.44) та (2.40),

$$\begin{aligned} \int_0^1 x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt &= \int_0^1 t^{-\lambda S_{\alpha_{r+f}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i}} dt = \\ &= \int_0^1 t^{-\lambda S_{\alpha_{r+1}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i}} dt. \end{aligned}$$

Отже, достатньо довести, що

$$-\lambda S_{\alpha_{r+1}} + \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} > -1.$$

Згідно з першою умовою з переліку (2.49), остання нерівність рівносильна нерівності

$$\sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+1};i} < \sum_{i=1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i}. \quad (2.54)$$

Доведемо нерівність (2.54). Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Покажемо, що існує таке $j \in \{1; \dots; n-1\}$, що виконується нерівність

$$k_{\alpha_{r+1};j} < k_{\alpha_{r+f};j} \quad (2.55)$$

та рівності

$$k_{\alpha_{r+1};j_1} = k_{\alpha_{r+f};j_1} \quad (2.56)$$

виконуються для всіх $j_1 \in \mathbb{N}$ таких, що $j_1 < j$. За впорядкуванням (2.35), $\alpha_{r+1} > \alpha_{r+f}$ оскільки $r+1 < r+f$. З рівності (2.40), $S_{\alpha_{r+1}} = S_{\alpha_{r+f}}$ оскільки $r+f < r+l+1$. Отже, за другою умовою відношення (2.33), існує таке $j \in \{1; \dots; n\}$, що

$$k_{\alpha_{r+1};j} < k_{\alpha_{r+f};j}$$

та

$$k_{\alpha_{r+1};j_1} = k_{\alpha_{r+f};j_1}$$

для кожного $j_1 \in \mathbb{N}$ такого, що $j_1 < j$. Покажемо, що $j < n$. Припустимо, що $j = n$. Тоді $k_{\alpha_{r+1};i} = k_{\alpha_{r+f};i}$, для кожного $i \in \{1; \dots; n-1\}$ та $k_{\alpha_{r+1};n} \neq k_{\alpha_{r+f};n}$. Тоді з рівності (2.10), $S_{\alpha_{r+1}} \neq S_{\alpha_{r+f}}$, що суперечить рівності (2.40). Таким чином, $j \in \{1; \dots; n-1\}$. Таким чином, нерівність (2.55) та рівності (2.56) виконуються.

З рівностей (2.56), нерівність (2.54) рівносильна нерівності

$$\sum_{i=j}^n \delta_i k_{\alpha_{r+1};i} < \sum_{i=j}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i},$$

що, в свою чергу, рівносильна нерівності

$$\sum_{i=j+1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+1};i} < \sum_{i=j}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} - \delta_j k_{\alpha_{r+1};j}. \quad (2.57)$$

Оскільки $\delta_i > 0$ та $k_{\alpha_{r+f};i} \geq 0$ для кожного $i \in \{j+1; \dots; n\}$, то виконується нерівність $\sum_{i=j+1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} \geq 0$. Отже,

$$\sum_{i=j}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} = \delta_j k_{\alpha_{r+f};j} + \sum_{i=j+1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} \geq \delta_j k_{\alpha_{r+1};j}.$$

Тоді

$$\sum_{i=j}^n \delta_i k_{\alpha_{r+f};i} - \delta_j k_{\alpha_{r+1};j} \geq \delta_j k_{\alpha_{r+f};j} - \delta_j k_{\alpha_{r+1};j} = (k_{\alpha_{r+f};j} - k_{\alpha_{r+1};j}) \delta_j. \quad (2.58)$$

З нерівності (2.55), $k_{\alpha_{r+f};j} - k_{\alpha_{r+1};j} > 0$. Тоді, оскільки $k_{\alpha_{r+f};j} - k_{\alpha_{r+1};j}$ натуральне число, маємо нерівність $k_{\alpha_{r+f};j} - k_{\alpha_{r+1};j} \geq 1$. Тоді

$$(k_{\alpha_{r+f};j} - k_{\alpha_{r+1};j}) \delta_j \geq \delta_j. \quad (2.59)$$

З умови номер $j + 1$ з переліку (2.49) та нерівності (2.32), для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$ виконуються нерівності

$$\delta_j > m \sum_{i=j+1}^n \delta_i = \sum_{i=j+1}^n \delta_i m \geq \sum_{i=j+1}^n \delta_i k_{\alpha_{r+1};i}. \quad (2.60)$$

З нерівностей (2.58), (2.59) та (2.60) випливає нерівність (2.57), що, в свою чергу, еквівалентна нерівності (2.54). Тож, нерівність (2.54) доведена. Отже, нерівність (2.53) виконується.

З нерівностей (2.45) та (2.53) випливає, що

$$\int_0^1 x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt < \infty \quad (2.61)$$

для кожного $f \in \mathbb{N}$ такого, що $r + 1 < r + f \leq q$.

Нехай

$$C_1 = 1 + \max \left(\max_{j \in \{1; \dots; n\}} \|x_j\|_{L_{p_j}}, \max_{f \in \{2; \dots; q-r\}} \left| \int_0^1 x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt \right| \right). \quad (2.62)$$

З твердження (2.43) та нерівності (2.61), таке C_1 існує.

Нехай

$$u_i(t) = \begin{cases} x_i(t), & \text{для } t \in [\xi; \frac{1}{2}), \\ 0, & \text{для } t \in [0; \xi) \cup [\frac{1}{2}; 1], \end{cases} \quad (2.63)$$

де $i \in \{1; \dots; n\}$, $0 < \xi < \frac{1}{2}$ та $t \in [0; 1]$. Відзначимо, що виконується нерівність

$$\|u_j\|_{L_j} \leq \|x_j\|_{L_j} \quad (2.64)$$

для кожного $j \in \{1; \dots; n\}$. Покажемо, що $u_j \in L_{p_1}$ для кожних $\xi \in (0; \frac{1}{2})$ та $j \in \{1; \dots; n\}$. З рівностей (2.42) та (2.63) отримаємо

$$\int_0^1 |u_j(t)|^{p_1} dt = \int_\xi^{\frac{1}{2}} (x_j(t))^{p_1} dt = \int_\xi^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{\lambda_{p_1}}{p_j} + p_1 \delta_j} dt < \infty$$

для кожних $\xi \in (0; \frac{1}{2})$ та $j \in \{1; \dots; n\}$. Отже, $u_j \in L_{p_1}$.

Набір $u_1; \dots; u_n$ задовольняє першій умові леми для кожного $\xi \in (0; \frac{1}{2})$ за його побудовою. Перевіримо другу умову леми. З рівності (2.62) та нерівності (2.64),

$$C_1 > \|x_j\|_{L_{p_j}} \geq \|u_j\|_{L_{p_j}}.$$

Отже, C_1 та $u_1; \dots; u_n$ задовольняють другій умові леми для кожного $\xi \in (0; \frac{1}{2})$.

З рівностей (2.12) та (2.63) випливають рівності

$$\begin{aligned} R_{\alpha_j}^{(L_{p_1}^n)}((u_1; \dots; u_n)) &= \int_0^1 u_1^{k_{\alpha_j;1}}(t) \cdot \dots \cdot u_n^{k_{\alpha_j;n}}(t) dt = \\ &= \int_\xi^{\frac{1}{2}} x_1^{k_{\alpha_j;1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_j;n}}(t) dt \end{aligned} \quad (2.65)$$

для кожного $j \in \{1; \dots; q\}$.

Перевіримо третю умову нашої леми. З рівностей (2.62) та (2.65), випливає, що

$$\begin{aligned} C_1 &> \left| \int_0^1 x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt \right| \geq \\ &\geq \left| \int_\xi^{\frac{1}{2}} x_1^{k_{\alpha_{r+f};1}}(t) \cdot \dots \cdot x_n^{k_{\alpha_{r+f};n}}(t) dt \right| = \\ &= \left| R_{\alpha_{r+f}}^{(L_{p_1}^n)}((u_1; \dots; u_n)) \right|. \end{aligned}$$

для кожного $f \in \mathbb{N}$ такого, що $r+1 < r+f \leq q$. Отже, C_1 та набір $u_1; \dots; u_n$ задовольняють умові 3 нашої леми для кожного $\xi \in (0; \frac{1}{2})$.

Перевіримо четверту умову нашої леми. Нехай $C_2 > 0$. З рівностей (2.65) та (2.51),

$$R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}((u_1; \dots; u_n)) = \int_\xi^{\frac{1}{2}} t^{-1} dt. \quad (2.66)$$

Зафіксуємо таке $\xi \in (0; \frac{1}{2})$, що виконується нерівність

$$\int_{\xi}^{\frac{1}{2}} t^{-1} dt > C_2. \quad (2.67)$$

Тоді, з рівності (2.66) та нерівності (2.67), набір $u_1; \dots; u_n$ задовольняє четвертій умові леми, тобто $R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}((u_1; \dots; u_n)) > C_2$. Тоді таке C_1 та набір $u_1; \dots; u_n$ задовольняють всім умовам леми. Лемі доведено. \square

Теорема 2.5. *Нехай простір L заданий означенням (2.26). Нехай $P : L \rightarrow \mathbb{C}$ симетричний неперервний m -однорідний поліном. Нехай P_1 це звуження полінома P на простір $L_{p_1}^n$. Нехай $Q : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}$ поліном заданий лемою 2.8, де q задане рівністю (2.34). Припустимо, що існує таке $r \in \{0; \dots; q-1\}$, що наступні умови виконуються:*

1. *існує таке $h \in \{r+1; r+2; \dots; q\}$, що $S_{\alpha_h} > 1$, де мультиіндекс α_h заданий впорядкуванням (2.35) та S_{α_h} задане рівністю (2.10);*
2. *якщо $r > 0$, то поліном Q не залежить від перших r змінних.*

Тоді поліном Q не залежить від своєї $(r+1)$ -шої змінної.

Доведення. Нехай N це різниця між кількістю елементів множини $\mathfrak{N}_L^{(m)}$ та r :

$$N = q - r.$$

Відзначимо, що $S_{\alpha_q} = \frac{1}{p_1} < 1$ за лемою 2.7 та рівністю (2.10) в той час як $S_{\alpha_h} > 1$ з першої умови нашої теореми. Тому $h \neq q$. Отже, оскільки обидва числа h, q належать множині $\{r+1; \dots; r+N\}$, то в цій множині міститься принаймні два елементи, тобто $N \geq 2$.

Нехай $\tau : \mathbb{C}^{r+N} \rightarrow \mathbb{C}^N$ це проекція, задана рівністю

$$\tau((a_1; \dots; a_{r+N})) = (a_{r+1}; \dots; a_{r+N})$$

для $(a_1; \dots; a_{r+N}) \in \mathbb{C}^{r+N}$. Введемо $Q_\tau : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$ за допомогою рівності

$$Q_\tau((a_{r+1}; \dots; a_{r+N})) = Q((0; \dots; 0; a_{r+1}; \dots; a_{r+N})).$$

З другої умови нашої теореми, поліном Q не залежить від своїх перших r змінних, отже,

$$Q(a) = Q_\tau(\tau(a)) \quad (2.68)$$

для кожного $a \in \mathbb{C}^{r+N}$.

Доведемо, що поліном Q_τ не залежить від своєї першої змінної. Будемо доводити це за допомогою леми 1.2, де замість m підставимо N .

Нехай $\chi : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^{N-1}$ це проекція задана рівністю

$$\chi((a_1; a_2; \dots; a_N)) = (a_2; \dots; a_N).$$

Нехай $C > 1$. Нехай

$$M = 2K_n C, \quad (2.69)$$

де K_n можна отримати з леми 2.3. Визначимо декілька допоміжних множин. Нехай

$$A_1 = \{u = (u_1; \dots; u_n) \in L_{p_1}^n : \|u_i\|_{L_{p_i}} < M \text{ для кожного } i \in \{1; \dots; n\}\}. \quad (2.70)$$

Нехай

$$A_2 = \left\{ u \in L_{p_1}^n : |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(u)| < C \text{ для кожного } j \in \{2; \dots; N\} \right\}. \quad (2.71)$$

Нехай

$$G = \left\{ (R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(u); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(u)) : u \in A_1 \cap A_2 \right\}. \quad (2.72)$$

Відзначимо, що $G \subset \mathbb{C}^N$. Перевіримо всі умови леми 1.2 для множини G , полінома Q_τ та проекції χ .

По-перше, $\chi(G)$ не порожня множина, оскільки G не порожня множина (наприклад, $(0; \dots; 0) \in G$).

Доведемо, що поліном $Q_\tau(G)$ обмежений. З означення (2.70), множина A_1 обмежена в просторі L . Отже, множина $A_1 \cap A_2$ обмежена в просторі L . Таким чином, поліном P обмежений на множині $A_1 \cap A_2$, оскільки є

неперервним на просторі L , тобто

$$\sup_{u \in A_1 \cap A_2} |P(u)| < \infty.$$

Таким чином, оскільки $A_1, A_2 \subset L_{p_1}^n$,

$$\sup_{u \in A_1 \cap A_2} |P_1(u)| = \sup_{u \in A_1 \cap A_2} |P(u)| < \infty, \quad (2.73)$$

де поліном P_1 це звуження полінома P на простір $L_{p_1}^n$. З другої умови нашої теореми, поліном Q не залежить від перших r змінних. Тоді, з рівності (2.68), випливає рівність

$$\begin{aligned} Q\left(\left(R_{\alpha_1}^{(L_{p_1}^n)}(u); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(u)\right)\right) &= Q\left(\left(0; \dots; 0; R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(u); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(u)\right)\right) = \\ &= Q_\tau\left(\left(R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(u); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(u)\right)\right) \end{aligned} \quad (2.74)$$

для кожного $u \in L_{p_1}^n$. З означення полінома Q , отриманого з леми 2.8, та рівності (2.74),

$$P_1(u) = Q_\tau\left(\left(R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(u); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(u)\right)\right)$$

для кожного $u \in L_{p_1}^n$. Отже, з означення (2.72),

$$\sup_{u \in A_1 \cap A_2} |P_1(u)| = \sup_{g \in G} |Q_\tau(g)|. \quad (2.75)$$

З рівності (2.75) та нерівності (2.73), отримуємо, що поліном Q_τ обмежений на множині G .

Доведемо, що множина $\chi^{-1}(U)$ необмежена для будь-якої відкритої множини $U \subset \chi(G)$. Достатньо довести це для довільної відкритої кулі U , побудованої з урахуванням метрики на \mathbb{C}^{N-1} ,

$$\rho(x; y) = \|x - y\|_\infty, \quad (2.76)$$

заданої нормою $\|(a_2; \dots; a_N)\|_\infty = \max_{j \in \{2; \dots; N\}} |a_j|$. Нехай $U \subset \chi(G)$ довільна відкрита куля побудована з урахуванням метрики (2.76). Нехай

$\varepsilon > 0$ це радіус кулі U . Оскільки $U \subset \chi(G)$, з визначення (2.72) випливає існування

$$v \in A_1 \cap A_2 \quad (2.77)$$

такого, що $(R_{\alpha_{r+2}}^{(L_{p_1}^n)}(v); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(v))$ є центром кулі U . Оскільки $v \in A_1 \cap A_2$, з означення (2.71) отримуємо

$$\left| R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v) \right| < C \quad (2.78)$$

для кожного $j \in \{2; \dots; N\}$. Нехай $c_U : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ буде задане рівністю

$$c_U(k) = \begin{cases} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v), & \text{якщо } k = \alpha_{r+j}, j \in \{2; \dots; N\}, \\ 0, & \text{якщо } k \neq \alpha_{r+j}, j \in \{2; \dots; N\} \end{cases} \quad (2.79)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$. З нерівності (2.78) та рівності (2.79),

$$|c_U(k)| < C$$

для кожного $k \in \{\alpha_{r+2}; \dots; \alpha_{r+N}\}$. Тоді, з рівності (2.79), беручи до уваги нерівність $C > 1$, отримуємо

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c_U(k)|^{\frac{1}{|k|}} = \max_{k \in \{\alpha_{r+2}; \dots; \alpha_{r+N}\}} |c_U(k)|^{\frac{1}{|k|}} < C. \quad (2.80)$$

Тоді, за лемою 2.3, існує такий

$$y = (y_1; \dots; y_n) \in L_\infty^n, \quad (2.81)$$

що

$$\int_0^1 y_1^{k_1}(t) y_2^{k_2}(t) \cdot \dots \cdot y_n^{k_n}(t) dt = c_U(k) \quad (2.82)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$ та

$$\|y\|_{L_\infty^n} \leq 2K_n \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c_U(k)|^{\frac{1}{|k|}}, \quad (2.83)$$

де

$$y_i(t) = 0 \text{ для кожного } i \in \{1; \dots; n\} \text{ та } t \in \left[0; \frac{1}{2}\right). \quad (2.84)$$

З нерівностей (2.83), (2.80) та рівності (2.69),

$$\|y\|_{L_\infty^n} < M. \quad (2.85)$$

З першої умови нашої теореми отримуємо, що $S_{\alpha_{r+j}} > 1$ для деякого $j \in \{1; \dots; N\}$. Тоді $S_{\alpha_{r+1}} > 1$, оскільки з нерівності (2.36) випливає, що $S_{\alpha_{r+1}} \geq S_{\alpha_{r+j}}$. Тоді, за лемою 2.9, існує таке $C_1 > 0$, що для будь-якого $C_2 > 0$ існує $x^{(C_2)} = (x_1^{(C_2)}; \dots; x_n^{(C_2)}) \in L_{p_1}^n$ таке, що наступні умови задовольняються:

- (а) $x_i^{(C_2)}(t) = 0$ для кожного $t \in [\frac{1}{2}; 1]$ та $i \in \{1; \dots; n\}$;
- (б) $\|x_i^{(C_2)}\|_{L_{p_i}} < C_1$ для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$;
- (в) $\left| R_{\alpha_j}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \right| < C_1$ для кожного $j \in \{r+2; \dots; q\}$;
- (г) $\left| R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \right| > C_2$.

Для деякого $C_2 > 0$ позначимо

$$z^{(C_2; \beta)} = y + \beta x^{(C_2)}, \quad (2.86)$$

де функція y визначена за допомогою (2.81), а $\beta > 0$ це параметр. Ми будемо уточнювати параметри C_2 та β пізніше. Оскільки $x^{(C_2)} \in L_{p_1}^n$ та $y \in L_\infty^n$, отримуємо, що $z^{(C_2; \beta)} \in L_{p_1}^n$. З властивості (а) функції $x^{(C_2)}$ та рівності (2.84),

$$z_i^{(C_2; \beta)}(t) = \begin{cases} \beta x_i^{(C_2)}(t), & \text{якщо } t \in [0; \frac{1}{2}), \\ y_i(t), & \text{якщо } t \in [\frac{1}{2}; 1] \end{cases} \quad (2.87)$$

для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$. Тоді рівність

$$R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) = R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(y) + R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(\beta x^{(C_2)}) \quad (2.88)$$

виконується для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. Відзначимо, що

$$R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(\beta x^{(C_2)}) = \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \quad (2.89)$$

для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$, оскільки $R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}$ це $|\alpha_{r+j}|$ -однорідний поліном. З рівностей (2.88) та (2.89), отримаємо рівність

$$R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) = R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(y) + \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \quad (2.90)$$

для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$.

Доведемо, що $z^{(C_2; \beta)} \in A_1$ для кожного $\beta > 0$, що задовольняє умові

$$\beta < \min_{i \in \{1; \dots; n\}} \frac{M - \|y_i\|_{L_{p_i}}}{C_1} \quad (2.91)$$

незалежно від значення параметра C_2 . Відзначимо, що з нерівностей (2.85) та (2.27) цей мінімум є додатним. З рівності (2.86) та властивості (б) функції $x^{(C_2)}$ отримуємо

$$\|z_i^{(C_2; \beta)}\|_{L_{p_i}} = \|\beta x_i^{(C_2)} + y_i\|_{L_{p_i}} \leq \beta \|x_i^{(C_2)}\|_{L_{p_i}} + \|y_i\|_{L_{p_i}} < \beta C_1 + \|y_i\|_{L_{p_i}} \quad (2.92)$$

для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$. Для кожного $\beta > 0$, що задовольняє умові (2.91), та кожного $i \in \{1; \dots; n\}$ виконується нерівність

$$\beta C_1 < M - \|y_i\|_{L_{p_i}}$$

і, відповідно, посилаючись на нерівність (2.92),

$$\|z_i^{(C_2; \beta)}\|_{L_{p_i}} < M$$

для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$, тобто, за означенням (2.70), $z^{(C_2; \beta)} \in A_1$. Отже, $z^{(C_2; \beta)} \in A_1$ для кожного $\beta > 0$, що задовольняє умові (2.91).

Покажемо, що $z^{(C_2; \beta)} \in A_2$ для кожного $\beta > 0$, що задовольняє умові

$$\beta < \min_{j \in \{2; \dots; N\}} \left(\frac{C - |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v)|}{C_1} \right)^{\frac{1}{|\alpha_{r+j}|}} \quad (2.93)$$

незалежно від значення параметра C_2 , де v заданий визначенням (2.77). Відзначимо, що додатність мінімуму впливає з означення (2.71), оскільки

$v \in A_1 \cap A_2$. З рівностей (2.90), (2.82), (2.79) та властивості (в) функції $x^{(C_2)}$ отримуємо

$$\begin{aligned}
|R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2;\beta)})| &= |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(y) + \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)})| = \\
&= |c_U(\alpha_{r+j}) + \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)})| = \\
&= |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v) + \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)})| \leq \\
&\leq |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v)| + \beta^{|\alpha_{r+j}|} |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)})| \leq \\
&\leq |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v)| + \beta^{|\alpha_{r+j}|} C_1
\end{aligned} \tag{2.94}$$

для кожного $j \in \{2; \dots; N\}$. Тоді для кожного $\beta > 0$, що задовольняє умові (2.93) та кожного $j \in \{2; \dots; N\}$ маємо нерівність

$$\beta^{|\alpha_{r+j}|} C_1 < C - |R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v)|.$$

Тоді, з нерівності (2.94),

$$|R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2;\beta)})| < C$$

для кожного $j \in \{2; \dots; N\}$, тобто, за означенням (2.71), $z^{(C_2;\beta)} \in A_2$. Отже, $z^{(C_2;\beta)} \in A_2$ для кожного $\beta > 0$, що задовольняє умові (2.93).

Таким чином, достатньо вибрати $\beta > 0$, що задовольняє умовам (2.91) та (2.93) для того, щоб функція $z^{(C_2;\beta)}$ була елементом множини $A_1 \cap A_2$ незалежно від параметра C_2 .

Зафіксуємо $\beta > 0$, що задовольняє умові

$$\beta < \min_{j \in \{2; \dots; N\}} \left(\frac{\varepsilon}{C_1} \right)^{\frac{1}{|\alpha_{r+j}|}}, \tag{2.95}$$

а також, умовам (2.91) та (2.93). Відзначимо, що жодна з цих умов не залежить від параметра C_2 . Покажемо, що

$$\left(R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2;\beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2;\beta)}) \right) \in \chi^{-1}(U), \tag{2.96}$$

тобто проекція точки $\left(R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2;\beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2;\beta)}) \right)$ потрапляє в кулю U . Згадаємо, що $\left(R_{\alpha_{r+2}}^{(L_{p_1}^n)}(v); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(v) \right)$ є центром кулі U , а ε є її радіусом. Оскільки β задовольняє умовам (2.91) та (2.93), то $z^{(C_2;\beta)} \in A_1 \cap A_2$.

Тоді, з означення (2.72),

$$\left(R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) \right) \in G.$$

Отже,

$$\left(R_{\alpha_{r+2}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) \right) \in \chi(G).$$

Із рівностей (2.76), (2.90), (2.82), (2.79), властивості (в) функції $x^{(C_2)}$ та умови (2.95),

$$\begin{aligned} & \rho\left(\left(R_{\alpha_{r+2}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)})\right); \left(R_{\alpha_{r+2}}^{(L_{p_1}^n)}(v); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(v)\right)\right) = \\ &= \max_{j \in \{2; \dots; N\}} \left| \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) + R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(y) - R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v) \right| = \\ &= \max_{j \in \{2; \dots; N\}} \left| \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) + c_U(\alpha_{r+j}) - R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v) \right| = \\ &= \max_{j \in \{2; \dots; N\}} \left| \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) + R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v) - R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(v) \right| = \\ &= \max_{j \in \{2; \dots; N\}} \left| \beta^{|\alpha_{r+j}|} R_{\alpha_{r+j}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \right| < \\ &< \left| \beta^{|\alpha_{r+j}|} C_1 \right| < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Тоді відстань між центром кулі U та елементом $\left(R_{\alpha_{r+2}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) \right)$ менша, ніж ε . Отже,

$$\left(R_{\alpha_{r+2}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) \right) \in U.$$

Таким чином, умова (2.96) виконується.

Покажемо, що множина $\chi^{-1}(U)$ необмежена. Достатньо довести, що множина

$$\left\{ \left(R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}); \dots; R_{\alpha_{r+N}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) \right) : C_2 \in (0; +\infty) \right\} \tag{2.98}$$

необмежена, оскільки, з умови (2.96), ця множина є підмножиною множини $\chi^{-1}(U)$. З рівностей (2.90), (2.82), (2.79) та властивості (г) функції $x^{(C_2)}$,

$$\begin{aligned} \left| R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)}) \right| &= \left| R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(y) + \beta^{|\alpha_{r+1}|} R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \right| = \\ &= \left| c_U(\alpha_{r+1}) + \beta^{|\alpha_{r+1}|} R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \right| = \\ &= \left| \beta^{|\alpha_{r+1}|} R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(x^{(C_2)}) \right| > \beta^{|\alpha_{r+1}|} C_2 \end{aligned}$$

для кожного $C_2 \in (0; +\infty)$. Таким чином, $|R_{\alpha_{r+1}}^{(L_{p_1}^n)}(z^{(C_2; \beta)})|$ можна зробити більшим за будь-яке наперед задане число, обравши для цього достатньо велике C_2 , тобто множина (2.98) необмежена. Тоді множина $\chi^{-1}(U)$ необмежена.

Ми перевірили всі умови леми 1.2 для множини G , полінома Q_τ та проєкції χ . Отже, за лемою 1.2, поліном Q_τ не залежить від своєї першої змінної. Тоді, з рівності (2.68), поліном Q не залежить від $(r+1)$ -шої змінної. Твердження доведено. \square

Теорема 2.6. *Нехай простір L заданий означенням (2.26). Нехай $P : L \rightarrow \mathbb{C}$ це симетричний неперервний m -однорідний поліном. Нехай P_1 це звуження полінома P на простір $L_{p_1}^n$. Нехай*

$$J = \{j : j \in \{1; \dots; q\} \text{ таке, що } S_{\alpha_j} \leq 1\}, \quad (2.99)$$

де мультиіндекс α_j заданий впорядкуванням (2.35) та S_{α_j} задане рівністю (2.10). Тоді поліном P_1 є алгебраїчною комбінацією елементів множини

$$\{R_{\alpha_j}^{(L_{p_1}^n)} : j \in J\}. \quad (2.100)$$

Крім того, множина J збігається з множиною

$$\{j^*; \dots; q\}, \quad (2.101)$$

де

$$j^* = \min\{j \in \{1; \dots; q\} : S_{\alpha_j} \leq 1\}. \quad (2.102)$$

Доведення. Нехай $Q : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}$ це поліном, що отримується з леми 2.8. Тоді

$$P_1(x) = Q(\eta(x)), \quad (2.103)$$

де відображення η задається рівністю (2.38) та $x \in L_{p_1}^n$. Отже, P_1 це алгебраїчна комбінація елементів множини

$$\{R_{\alpha_j}^{(L_{p_1}^n)} : j \in \{1; \dots; q\}\}. \quad (2.104)$$

Розглянемо два випадки.

Перший випадок: не існує такого $j \in \{1; \dots; q\}$, що $S_{\alpha_j} > 1$. Тоді множина (2.100) збігається з множиною (2.104). Отже, поліном P_1 є алгебраїчною комбінацією елементів множини (2.100). Відзначимо, що в цьому випадку $j^* = 1$. Тоді, множина (2.99) збігається з множиною (2.101).

Другий випадок: існує таке $j \in \{1; \dots; q\}$, що $S_{\alpha_j} > 1$. Нехай

$$j_* = \max\{j \in \{1; \dots; q\} : S_{\alpha_j} > 1\}. \quad (2.105)$$

Покажемо, що поліном Q не залежить від своєї m -тої змінної для кожного $m \in \{1; \dots; j_*\}$. Припустимо, що це не так. Нехай $m_1 \in \{1; \dots; j_*\}$ це найменше число таке, що поліном Q залежить від своєї m_1 -шої змінної. Тоді, поліном Q не залежить від своїх перших $m_1 - 1$ змінних. Тоді виконується друга умова теореми 2.5 для $r = m_1 - 1$ та $h = j_*$. Відзначимо, що з означення (2.105) випливає виконання першої умови теореми 2.5 для $r = m_1 - 1$ та $h = j_*$. Тоді, за теоремою 2.5, поліном Q не залежить від своєї m_1 -шої змінної. Це суперечить нашому припущенню. Тоді поліном Q не залежить від своєї m -тої змінної для кожного $m \in \{1; \dots; j_*\}$.

З рівності (2.103), поліном P_1 це алгебраїчна комбінація елементів множини (2.104). Як доведено вище, поліном Q не залежить від своїх перших j_* змінних. Тоді поліном P_1 це алгебраїчна комбінація елементів множини

$$\left\{ R_{\alpha_j}^{(L_{p_1}^n)} : j \in \{j_* + 1; \dots; q\} \right\}. \quad (2.106)$$

З означення (2.105), $S_{\alpha_j} \leq 1$ для кожного $j \in \{j_* + 1; \dots; q\}$. Отже, множина (2.106) це підмножина множини (2.100). З означення (2.105), $S_{\alpha_{j_*}} > 1$. Тоді з нерівності (2.36) для кожного $j_0 \in \{1; \dots; q\}$ такого, що $S_{\alpha_{j_0}} \leq 1$ випливає, що $j_0 > j_*$. Таким чином, множина (2.100) є підмножиною множини (2.106). Тобто, множина (2.100) збігається з множиною (2.106). Отже, поліном P_1 є алгебраїчною комбінацією елементів множини

(2.100). З означень (2.105), (2.102) та нерівності (2.36), $j_* + 1 = j^*$. Отже, множина (2.99) збігається з множиною (2.101). Теорему доведено. \square

Тоді можемо отримати головні результати цього підрозділу:

Теорема 2.7. *Нехай простір L заданий рівністю (2.26). Кожний неперервний симетричний m -однорідний поліном $P : L \rightarrow \mathbb{C}$ є алгебраїчною комбінацією елементів множини*

$$\left\{ R_{\alpha_j}^{(L)} : \alpha_j \in \aleph_L^{(m)} \text{ такі, що } S_{\alpha_j} \leq 1 \right\}, \quad (2.107)$$

де S_α задане рівністю (2.10), $\aleph_L^{(m)}$ задане означенням (2.30), а порядок на множині $\aleph_L^{(m)}$ заданий впорядкуванням (2.35).

Доведення. Нехай P_1 це звуження полінома P на простір $L_{p_1}^n$. За теоремою 2.6, поліном P_1 є алгебраїчною комбінацією елементів множини (2.100). За теоремою 2.6, кількість елементів в множині (2.100) дорівнює кількості елементів в множині (2.101), що, в свою чергу, дорівнює $q - j^* + 1$. Отже, існує такий поліном $H : \mathbb{C}^{q-j^*+1} \rightarrow \mathbb{C}$, що

$$P_1(x) = H\left(\left(R_{\alpha_{j^*}}^{(L_{p_1}^n)}(x); \dots; R_{\alpha_q}^{(L_{p_1}^n)}(x)\right)\right) \quad (2.108)$$

для кожного $x \in L_{p_1}^n$. Нехай поліном $G : L \rightarrow \mathbb{C}$ заданий рівністю

$$G = P - H_{\mathcal{P}_{G_{p_1}; \dots; p_n}(L)}\left(R_{\alpha_{j^*}}^{(L)}; \dots; R_{\alpha_q}^{(L)}\right), \quad (2.109)$$

де поліном $H_{\mathcal{P}_{G_{p_1}; \dots; p_n}(L)}$ для полінома H заданий рівністю (1.7). За теоремою 2.2, всі елементи множини (2.107) неперервні на просторі L . Таким чином, оскільки H це поліном, то поліном

$$H_{\mathcal{P}_{G_{p_1}; \dots; p_n}(L)}\left(R_{\alpha_{j^*}}^{(L)}; \dots; R_{\alpha_q}^{(L)}\right)$$

є неперервним на просторі L . Тоді, з рівності (2.109), беручи до уваги, що поліном P неперервний на просторі L за умовою теореми, отримуємо, що

поліном G неперервний на просторі L . З рівностей (2.109) та (2.108), для кожного $x \in L_{p_1}^n$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} G(x) &= P(x) - H\left(R_{\alpha_{j^*}}^{(L)}(x); \dots; R_{\alpha_q}^{(L)}(x)\right) = \\ &= P_1(x) - H\left(R_{\alpha_{j^*}}^{(L_{p_1}^n)}(x); \dots; R_{\alpha_q}^{(L_{p_1}^n)}(x)\right) = 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

З твердження (2.27), $L_\infty \subset L_{p_1}$ та $L_{p_1} \subset L_{p_i}$ для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$. Таким чином, $L_\infty \subset L_{p_1}^n \subset L$. Тоді за лемою 2.2, підпростір $L_{p_1}^n$ щільний в просторі L . Тоді рівність (2.110) стверджує, що неперервний поліном G дорівнює нулю на щільному підпросторі $L_{p_1}^n$ простору L . Отже, поліном G дорівнює нулю у всіх точках простору L . Отже, з рівності (2.109),

$$P(x) = H\left(R_{\alpha_{j^*}}^{(L)}(x); \dots; R_{\alpha_q}^{(L)}(x)\right)$$

для кожного $x \in L$. Множини (2.101) та (2.99) збігаються за теоремою 2.6, тому поліном P це алгебраїчна комбінація елементів множини (2.107). Теорему доведено. \square

Лема 2.10. *Нехай $P = P_0 + P_1 + \dots + P_N$ це симетричний неперервний комплекснозначний поліном на просторі L заданому рівністю (2.26), де $P_0 \in \mathbb{C}$, а P_j це j -однорідний поліном для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. Тоді поліном P_j є симетричним і неперервним, для кожного $j \in \{0; \dots; N\}$.*

Доведення. Твердження леми відразу випливає з інтегральної формули Коші (див. [39, Наслідок 7.3, с. 47]) оскільки $P_0 + \dots + P_N$ це ряд Тейлора полінома P в нулі. \square

Доведемо головний результат цього підрозділу.

Теорема 2.8. *Нехай простір L заданий рівністю (2.26), тобто*

$$L = L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}, p_i \in [1; \infty), p_1 \geq \dots \geq p_n.$$

Множина поліномів

$$\{R_\alpha^{(L)} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}, \quad (2.111)$$

де поліноми $R_\alpha^{(L)}$ задані рівністю (2.12) та множина $\mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$ задана рівністю (2.11) є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі L .

Доведення. По-перше, доведемо, що (2.111) це множина твірних елементів згаданої алгебри. Нехай $P : L \rightarrow \mathbb{C}$ це довільний симетричний неперервний комплекснозначний поліном. З рівності (1.3),

$$P = P_0 + P_1 + \dots + P_N,$$

де $N \in \mathbb{N}$, $P_0 \in \mathbb{C}$ та P_j це j -однорідний поліном для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. Оскільки поліном P симетричний і неперервний, за лемою 2.10, поліноми P_j теж симетричні і неперервні для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. За теоремою 2.7, для $m = j$, поліном P_j це алгебраїчна комбінація елементів множини (2.107) для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. За означеннями (2.11) та (2.30), множина (2.107) для $m = j$ є підмножиною множини (2.111). Отже, поліном P_j це алгебраїчна комбінація елементів множини (2.111) для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. Таким чином, поліном P це алгебраїчна комбінація елементів множини (2.111).

По-друге, доведемо, що множина (2.111) є алгебраїчно незалежною. Припустимо, що множина (2.111) алгебраїчно залежна. Тоді існує підмножина $\{R_{\beta_1}^{(L)}; \dots; R_{\beta_r}^{(L)}\}$ множини (2.111) і такий нетривіальний поліном $Q : \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$, що

$$Q\left(R_{\beta_1}^{(L)}(x); \dots; R_{\beta_r}^{(L)}(x)\right) = 0 \quad (2.112)$$

для кожного $x \in L$. Покажемо, що такий поліном Q не може бути нетривіальним.

Нехай $(z_1; \dots; z_r)$ це довільний елемент простору \mathbb{C}^r . Визначимо відображення $c : \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\} \rightarrow \mathbb{C}$ рівністю

$$c(k) = \begin{cases} z_i, & \text{для } k = \beta_i \text{ де } i \in \{1; \dots; r\}, \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (2.113)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$. Відзначимо, що

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}} |c(k)|^{\frac{1}{|k|}} < \infty.$$

Тоді за лемою 1.3, пригадуючи твердження (2.28), існує таке $x_c = (x_1; \dots; x_n) \in L_\infty^n$, що

$$R_k^{(L)}(x_c) = c(k) \quad (2.114)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$. Отже, з рівності (2.113) випливає рівність

$$R_{\beta_i}^{(L)}(x_c) = z_i \quad (2.115)$$

для кожного $i \in \{1; \dots; r\}$. Підставляючи функцію x_c в рівність (2.112) і користуючись рівностями (2.115) отримуємо рівність

$$Q(z_1; \dots; z_r) = 0.$$

Отже, $Q(z_1; \dots; z_r) = 0$ для довільного $(z_1; \dots; z_r) \in \mathbb{C}^r$. Таким чином, поліном Q тривіальний. Це суперечить припущенню. Отже, множина (2.111) алгебраїчно незалежна.

Таким чином, множина (2.111) є алгебраїчним базисом алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі L . Теорему доведено. \square

2.3. Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом для довільних $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$

Мета цього підрозділу — це доведення результату аналогічного головного результату минулого підрозділу — теоремі 2.8 — знявши умову (2.25). Тобто, доведення того факту, що алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$

комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, для довільних $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$ це множина $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}\}$, де поліноми $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ визначені за допомогою рівності (2.12), де множина $\mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$ визначена за допомогою рівності (2.11). Будемо доводити цей результат, встановивши ізоморфізм між алгеброю неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ для $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ та алгеброю неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p'_1} \times L_{p'_2} \times \dots \times L_{p'_n}$ для довільних $p'_1, p'_2, \dots, p'_n \geq 1$.

Нехай $p_1; p_2; \dots; p_n \in [1; +\infty)$. Нехай

$$L' = L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n} \text{ та } L^{(\tau)} = L_{p_{\tau(1)}} \times L_{p_{\tau(2)}} \times \dots \times L_{p_{\tau(n)}}, \quad (2.116)$$

де $\tau : \{1; \dots; n\} \rightarrow \{1; \dots; n\}$ це деяка довільна перестановка.

Визначимо відображення $\iota : L' \rightarrow L^{(\tau)}$ рівністю

$$\iota((x_1; \dots; x_n)) = (x_{\tau(1)}; \dots; x_{\tau(n)}), \quad (2.117)$$

де $(x_1; \dots; x_n) \in L'$.

Лема 2.11. *Відображення ι , задане рівністю (2.117), це коректно визначений ізометричний ізоморфізм.*

Доведення. Покажемо, що відображення ι коректно визначене, тобто. $\iota(x) \in L^{(\tau)}$ для кожного $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in L'$. З рівності (2.117), $\iota(x) = (x_{\tau(1)}; \dots; x_{\tau(n)})$. Для кожного $j \in \{1; \dots; n\}$, отримуємо $x_{\tau(j)} \in L_{p_{\tau(j)}}$, оскільки $x \in L'$. Тоді $\iota(x) \in L^{(\tau)}$.

Покажемо, що відображення ι зберігає норму. Нехай $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in L'$. Відзначимо, що

$$\|\iota(x)\|_{L^{(\tau)}} = \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \|x_{\tau(j)}\|_{L_{p_{\tau(j)}}} = \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \|x_j\|_{L_{p_j}} = \|x\|_{L'}.$$

Лінійність відображення ι легко перевіряється.

Покажемо, що відображення ι це бієкція. Відображення $\iota \in$ лінійною ізометрією. Тому відображення ι ін'єктивне. Покажемо, що відображення ι сюр'єктивне. Нехай $y = (y_1; y_2; \dots; y_n) \in L^{(\tau)}$. Побудуємо такий $x \in L'$, що $\iota(x) = y$. Нехай $x = (y_{\tau^{-1}(1)}; \dots; y_{\tau^{-1}(n)})$. Покажемо, що $x \in L'$, тобто, $y_{\tau^{-1}(i)} \in L_{p_i}$ для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$. Відзначимо, що для кожного $i \in \{1; \dots; n\}$ виконується $y_{\tau^{-1}(i)} \in L_{p_{\tau^{-1}(i)}} = L_{p_i}$, оскільки $y \in L^{(\tau)}$. Отже, $x \in L'$. З рівності (2.117),

$$\iota(x) = (y_{\tau^{-1}(1)}; \dots; y_{\tau^{-1}(n)}) = (y_1; \dots; y_n) = y.$$

Тоді відображення ι сюр'єктивне. Отже, відображення $\iota \in$ бієкцією. Лему доведено. \square

Визначимо відображення $\phi : \aleph_{p_1; \dots; p_n} \rightarrow \aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$ рівністю

$$\phi((k_1; \dots; k_n)) = (k_{\tau(1)}; \dots; k_{\tau(n)}), \quad (2.118)$$

де множини $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ та $\aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$ задані означенням (2.11).

Лема 2.12. *Відображення ϕ , задане рівністю (2.118), це коректно визначена бієкція.*

Доведення. Відзначимо, що

$$S_{\phi(\alpha)}^{(L^{(\tau)})} = \sum_{i=1}^n \frac{k_{\tau(i)}}{p_{\tau(i)}} = \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{p_i} = S_{\alpha}^{(L')} \quad (2.119)$$

для кожного $\alpha = (k_1; \dots; k_n) \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$, де $S_{\alpha}^{(L')}$ та $S_{\phi(\alpha)}^{(L^{(\tau)})}$ задані рівністю (2.10).

Оскільки $\alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$, з означення (2.11) відомо, що $0 < S_{\alpha}^{(L')} \leq 1$. Отже, з рівності (2.119), $0 < S_{\phi(\alpha)}^{(L^{(\tau)})} \leq 1$. Тоді, за означенням (2.11), $\phi(\alpha) \in \aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$.

Покажемо, що відображення ϕ це бієкція. Нехай $\alpha = (k_1; \dots; k_n)$ та $\beta = (q_1; \dots; q_n) \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$ довільні елементи, такі що $\alpha \neq \beta$. Тоді існує

таке $j \in \{1; \dots; n\}$, що $k_j \neq q_j$. Таким чином, $k_{\tau(\tau^{-1}(j))} \neq q_{\tau(\tau^{-1}(j))}$ і, відповідно, мультиіндекси $\phi(\alpha)$ and $\phi(\beta)$ мають різні значення в компонентах з індексом $\tau^{-1}(j)$. Отже, $\phi(\alpha) \neq \phi(\beta)$. Оскільки α та β це довільні різні мультиіндекси, то відображення ϕ це ін'єкція. Покажемо, що відображення ϕ це сюр'єкція. Нехай $\beta = (q_1; \dots; q_n) \in \mathfrak{N}_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$. Побудуємо такий мультиіндекс $\alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$, що $\phi(\alpha) = \beta$. Нехай $\alpha = (q_{\tau^{-1}(1)}; \dots; q_{\tau^{-1}(n)})$. Покажемо, що $\alpha \in Al$. Відзначимо, що

$$S_{\alpha}^{(L')} = \sum_{i=1}^n \frac{q_{\tau^{-1}(i)}}{p_i} = \sum_{i=1}^n \frac{q_{\tau^{-1}(i)}}{p_{\tau(\tau^{-1}(i))}} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_{\tau(i)}} = S_{\beta}^{(L^{(\tau)})}. \quad (2.120)$$

Оскільки $\beta \in \mathfrak{N}_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$, за означенням (2.11), ми знаємо, що $0 < S_{\beta}^{(L^{(\tau)})} \leq 1$. Тоді, з рівності (2.120) отримуємо нерівність $0 < S_{\alpha}^{(L')} \leq 1$. Таким чином, за означенням (2.11) отримуємо, що $\alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n}$. З рівності (2.118),

$$\phi(\alpha) = (q_{\tau(\tau^{-1}(1))}; \dots; q_{\tau(\tau^{-1}(n))}) = (q_1; \dots; q_n) = \beta.$$

Таким чином, відображення ϕ це сюр'єкція. Отже, відображення ϕ це бієкція. Лему доведено. \square

Теорема 2.9. *Нехай $\tau : \{1; \dots; n\} \rightarrow \{1; \dots; n\}$ це перестановка. Нехай простори L' та $L^{(\tau)}$ задані означенням (2.116), відображення ι задане рівністю (2.117), а множини $G_{p_1; \dots; p_n}$ та $G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$ задані означенням (1.16). Тоді*

a) *відображення $I : f \in H_{b, G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}}(L^{(\tau)}) \mapsto f \circ \iota \in H_{b, G_{p_1; \dots; p_n}}(L')$ це ізоморфізм, тобто, I це неперервна лінійна мультиплікативна бієкція;*

b) *звуження I на $\mathcal{P}_{G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}}(L^{(\tau)})$ це ізоморфізм між алгебрами $\mathcal{P}_{G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}}(L^{(\tau)})$ та $\mathcal{P}_{G_{p_1; \dots; p_n}}(L')$;*

c) *якщо в алгебрі $\mathcal{P}_{G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}}(L^{(\tau)})$ існує деякий алгебраїчний базис B , то $I(B)$ це алгебраїчний базис в алгебрі $\mathcal{P}_{G_{p_1; \dots; p_n}}(L')$.*

Доведення. Підставимо в теорему 1.3 простори $L', L^{(\tau)}$, множини $G_{p_1; \dots; p_n}, G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$, та відображення ι замість $X, Y, G_1, G_2, \iota_{X, Y}$. Перевіримо першу умову теореми 1.3, яка в нашому випадку набуває наступну

форму: для кожного $x \in L'$ та $g_1 \in G_{p_1; \dots; p_n}$, існує таке $g_2 \in G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$, що $\iota(g_1(x)) = g_2(\iota(x))$. Нехай $g_1 \in G_{p_1; \dots; p_n}$. Задамо $g_2 : L^{(\tau)} \rightarrow L^{(\tau)}$ за допомогою рівності

$$g_2(y) = \iota(g_1(\iota^{-1}(y))), \quad (2.121)$$

де $y \in L^{(\tau)}$. Тоді для кожного $x \in L'$ маємо рівність

$$g_2(\iota(x)) = \iota(g_1(\iota^{-1}(\iota(x)))) = \iota(g_1(x)).$$

Покажемо, що $g_2 \in G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$. Для кожного $y \in L^{(\tau)}$, з рівності (2.117) випливає, що $\iota^{-1}(y) \in L'$. Тоді, за означенням відображення g_1 , $g_1(\iota^{-1}(y)) \in L'$. Отже, для кожного $y \in L^{(\tau)}$, з рівності (2.117) випливає, що $\iota(g_1(\iota^{-1}(y))) \in L^{(\tau)}$, тобто $g_2(y) \in L^{(\tau)}$. Отже, g_2 діє з простору $L^{(\tau)}$ до простору $L^{(\tau)}$. Оскільки $g_1 \in G_{p_1; \dots; p_n}$, за означеннями (1.15) та (1.16), існує бієкція $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ така, що для кожного $x = (x_1; \dots; x_n) \in L'$ виконується рівність

$$g_1(x) = (x_1 \circ \sigma; \dots; x_n \circ \sigma).$$

Тоді для кожного $y = (y_1; \dots; y_n) \in L^{(\tau)}$ виконується рівність

$$g_1(\iota^{-1}(y)) = (y_{\tau^{-1}(1)} \circ \sigma; \dots; y_{\tau^{-1}(n)} \circ \sigma).$$

Тоді з рівності (2.121) випливає наступний ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} g_2(y) &= \iota(g_1(\iota^{-1}(y))) = \\ &= \iota((y_{\tau^{-1}(1)} \circ \sigma; \dots; y_{\tau^{-1}(n)} \circ \sigma)) = \\ &= (y_{\tau(\tau^{-1}(1))} \circ \sigma; \dots; y_{\tau(\tau^{-1}(n))} \circ \sigma) = \\ &= (y_1 \circ \sigma; \dots; y_n \circ \sigma) \end{aligned}$$

для кожного $y \in L^{(\tau)}$. Таким чином, ми подали відображення g_2 у формі (1.15). Тобто, за означенням (1.16) маємо, що $g_2 \in G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$.

Перевіримо другу умову теореми 1.3, яка в нашому випадку набуває наступну форму: для кожного $y \in L^{(\tau)}$ та $g_2 \in G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$ існує таке $g_1 \in$

$G_{p_1; \dots; p_n}$, що $\iota^{-1}(g_2(y)) = g_1(\iota^{-1}(y))$. Нехай $g_2 \in G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$. Задамо $g_1 : L' \rightarrow L'$ за допомогою рівності

$$g_1(x) = \iota^{-1}(g_2(\iota(x))), \quad (2.122)$$

де $x \in L'$. Тоді для кожного $y \in L^{(\tau)}$ маємо рівність

$$g_1(\iota^{-1}(y)) = \iota^{-1}(g_2(\iota(\iota^{-1}(y)))) = \iota^{-1}(g_2(y)).$$

Покажемо, що таке $g_1 \in G_{p_1; \dots; p_n}$. Для кожного $x \in L'$, з рівності (2.117) випливає, що $\iota(x) \in L^{(\tau)}$. Тоді за означенням g_2 маємо, що $g_2(\iota(x)) \in L^{(\tau)}$. Тоді для кожного $x \in L'$ з рівності (2.117) випливає, що $\iota^{-1}(g_2(\iota(x))) \in L'$, тобто $g_1(x) \in L'$. Тоді відображення g_1 діє з простору L' до простору L' . Оскільки $g_2 \in G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$, з означень (1.15) та (1.16) випливає, що існує така бієкція $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$, що $g_2(y) = (y_1 \circ \sigma; \dots; y_n \circ \sigma)$ для кожного $y = (y_1; \dots; y_n) \in L^{(\tau)}$. Тоді для кожного $x = (x_1; \dots; x_n) \in L'$ виконується рівність

$$g_2(\iota(x)) = (x_{\tau(1)} \circ \sigma; \dots; x_{\tau(n)} \circ \sigma).$$

Тоді з рівності (2.122) маємо наступний ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \iota^{-1}(g_2(\iota(x))) = \\ &= \iota^{-1}((x_{\tau(1)} \circ \sigma; \dots; x_{\tau(n)} \circ \sigma)) = \\ &= (x_{\tau^{-1}(\tau(1))} \circ \sigma; \dots; x_{\tau^{-1}(\tau(n))} \circ \sigma) = \\ &= (x_1 \circ \sigma; \dots; x_n \circ \sigma). \end{aligned}$$

для кожного $x \in L'$. Отже, ми подали g_1 в формі (1.15). Таким чином, за означенням (1.16) маємо, що $g_1 \in G_{p_1; \dots; p_n}$.

Таким чином, ми перевірили обидві умови. Отже, за теоремою 1.3, властивості а), б) та с) нашої теореми виконуються. Теорему доведено. \square

Лема 2.13. *Нехай простори L' та $L^{(\tau)}$ задані означенням (2.116). Нехай I це відображення, задане властивістю а) теореми 2.9. Тоді $I\left(R_\alpha^{(L^{(\tau)})}\right) =$*

$R_{\phi^{-1}(\alpha)}^{(L')}$ для кожного $\alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$, де множина $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ задана означенням (2.11), відображення ϕ задане означенням (2.118) та поліноми $R_{\alpha}^{(L^{(\tau)})}$, $R_{\phi^{-1}(\alpha)}^{(L')}$ задані рівністю (2.12).

Доведення. Нехай $\alpha = (k_1; \dots; k_n) \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$. Тоді

$$\begin{aligned} I(R_{\alpha}^{(L^{(\tau)})})(x) &= R_{\alpha}^{(L^{(\tau)})}(\iota(x)) = R_{(k_1; \dots; k_n)}^{(L^{(\tau)})}((x_{\tau(1)}; \dots; x_{\tau(n)})) = \\ &= \int_0^1 x_{\tau(1)}^{k_1}(t) \cdot \dots \cdot x_{\tau(n)}^{k_n}(t) dt = R_{\phi^{-1}(\alpha)}^{(L')}(x) \end{aligned}$$

для кожного $x \in L'$. Лему доведено. \square

З доведених результатів можна зробити фінальний висновок цього розділу.

Теорема 2.10. *Нехай $p_1; \dots; p_n \in [1; +\infty)$. Нехай простір $L' = L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Множина поліномів $\{R_{\alpha}^{(L')} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$, де поліноми $R_{\alpha}^{(L')}$ задані рівністю (2.12), а множина $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ задана означенням (2.11), це алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на L' .*

Доведення. Нехай $\tau : \{1; \dots; n\} \rightarrow \{1; \dots; n\}$ це така перестановка, що $p_{\tau(1)} \geq \dots \geq p_{\tau(n)}$. Нехай

$$L^{(\tau)} = L_{p_{\tau(1)}} \times L_{p_{\tau(2)}} \times \dots \times L_{p_{\tau(n)}}.$$

Визначимо відображення ι та ϕ за означеннями (2.117) та (2.118) відповідно, використовуючи перестановку τ .

За теоремою 2.8, алгебра $\mathcal{P}_{G_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}}(L^{(\tau)})$ має алгебраїчний базис

$$B = \{R_{\alpha}^{(L^{(\tau)})} : \alpha \in \aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}\},$$

де множина $\aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$ задається означенням (2.11). Підставимо $\tau, L', L^{(\tau)}, B$ в теорему 2.9. Тоді, з властивості с) теореми 2.9 випливає, що множина $I(B)$ це алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{G_{p_1; \dots; p_n}}(L')$. Для

кожного $\alpha \in \aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}$ рівність

$$I(R_{\alpha}^{(L^{(\tau)})}) = R_{\phi^{-1}(\alpha)}^{(L')}$$

впливає з леми 2.13. Отже, $I(B) = \{R_{\phi^{-1}(\alpha)}^{(L')} : \alpha \in \aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}\}$. Тобто, ця множина є алгебраїчним базисом в $\mathcal{P}_{G_{p_1; \dots; p_n}}(L')$. З леми 2.12 впливає рівність

$$\{R_{\phi^{-1}(\alpha)}^{(L')} : \alpha \in \aleph_{p_{\tau(1)}; \dots; p_{\tau(n)}}\} = \{R_{\alpha}^{(L')} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}.$$

Таким чином, $\{R_{\alpha}^{(L')} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ це алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_{G_{p_1; \dots; p_n}}(L')$. Теорему доведено. \square

Розділ 2 присвячено дослідженню алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом.

В підрозділі 2.1 побудовано множини елементарних симетричних поліномів $\{R_{\alpha}^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ та $\{R_{\alpha}^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$ і досліджено властивості першої з них.

В підрозділі 2.2 доведено, що алгебраїчним базисом алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, у випадку $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$ є множина елементарних симетричних поліномів $\{R_{\alpha}^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$.

Нарешті, в підрозділі 2.3 вставлений ізоморфізм між алгебрами комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ для $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ та алгеброю комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p'_1} \times L_{p'_2} \times \dots \times L_{p'_n}$ для довільних $p'_1, p'_2, \dots, p'_n \geq 1$. Скориставшись ізоморфічністю алгебр доведено, що алгебраїчний базис алгебри

комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, для довільних $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$ це множина $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}\}$.

Результати другого розділу опубліковані в статті [70]. Вони також доповідалися на науковій конференції [74] та наукових семінарах.

РОЗДІЛ 3. Алгебраїчні базиси алгебр неперервних поліномів, заданих на дійсних банахових просторах

Мета цього розділу це знаходження алгебраїчних базисів підалгебр алгебри неперервних дійснозначних поліномів на дійсному банаховому просторі за допомогою алгебраїчних базисів підалгебр алгебри неперервних комплекснозначних поліномів на комплексифікації цього простору та застосування знайдених структурних зв'язків для знаходження результату, аналогічного до основного результату попереднього розділу для алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку дійсних просторів функцій інтегровних за Лебегом. А саме, встановлення дійсного аналогу теореми 2.10.

3.1. Алгебраїчні базиси алгебр неперервних поліномів, заданих на дійсних банахових просторах, породжені алгебраїчними базисами алгебр неперервних поліномів на комплексифікаціях цих просторів

Метою цього підрозділу є побудова алгебраїчного базису підалгебри алгебри дійснозначних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі E , для якої існує деяка підалгебра алгебри комплекснозначних неперервних поліномів на просторі \tilde{E} — комплексифікації простору E , яка має алгебраїчний базис та містить комплексні продовження всіх елементів початкової підалгебри.

Твердження 3.1. *Нехай E це банахів простір над полем \mathbb{R} . Для кожного полінома $P : E \rightarrow \mathbb{R}$ існує єдиний поліном $\hat{P} : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{C}$, де \tilde{E} це комплексифікація простору E такий, що звуження полінома \hat{P} на простір E збігається з поліномом P . Цей поліном можна отримати за допомогою*

означення 1.3. Поліном P неперервний тоді і тільки тоді, коли поліном \widehat{P} неперервний.

Доведення. Нехай існує якийсь інший поліном $Q : \widetilde{E} \rightarrow \mathbb{C}$ такий, що звуження полінома Q на простір E збігається з поліномом P . Розглянемо поліном $G = Q - \widehat{P}$. Оскільки G це поліном, існує таке число $n \in \mathbb{N}$, що $G = G_0 + G_1 + \dots + G_n$, де $G_j, j \in \{0; \dots; n\}$, це j -однорідний поліном. Звуження полінома G на простір E це сума звужень поліномів G_j , де звуження кожного полінома G_j є j -однорідним поліномом. Відзначимо, що звуження полінома G на простір E дорівнює нулю. Тоді, спираючись на лему 1.1, звуження всіх поліномів G_j дорівнює нулю. Згідно з теоремою 1.1, це означає, що $G_j = 0$ для кожного $j \in \{0; \dots; n\}$. Відповідно, $G = 0$. Тобто $Q = \widehat{P}$. Це суперечить припущенню. Отже, існує єдиний комплекснозначний поліном на \widetilde{E} , звуження якого на E дорівнює P .

Відзначимо, що лема 1.1 гарантує, що однорідні частини неперервних поліномів неперервні, а теорема 1.2 гарантує, що комплексні продовження неперервних однорідних поліномів неперервні. Таким чином, кожний неперервний поліном має неперервне комплексне продовження.

Нехай поліном $P : E \rightarrow \mathbb{R}$ такий, що його комплексне продовження \widehat{P} неперервне. Тоді $\|\widehat{P}\| < \infty$. Відповідно, $\|P\| < \infty$. Тоді P — це неперервний поліном. Таким чином, ми довели, що поліном P неперервний тоді і тільки тоді, коли поліном \widehat{P} неперервний. \square

Лема 3.1. Нехай X це лінійний простір над полем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}; \mathbb{C}\}$. Нехай $n \in \mathbb{N}$, а множина поліномів $\{P_1; \dots; P_n\} \subset \mathcal{P}(X; \mathbb{K})$ така, що виконуються наступні умови:

1) для кожного $j \in \{1; \dots; n\}$ існує число $m_j \in \mathbb{Z}_+$ таке, що поліном P_j є m_j -однорідним;

2) для кожного полінома $Q : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ вигляду

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+ \\ k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = l}} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

де l це ціле невід'ємне число, $\alpha_{(k_1, \dots, k_n)} \in \mathbb{K}$, а рівність $Q_{\mathcal{P}(X; \mathbb{K})}(P_1, \dots, P_n) \equiv 0$, де поліном $Q_{\mathcal{P}(X; \mathbb{K})}$ визначений за допомогою рівності (1.7), виконується тільки тоді, коли $Q \equiv 0$.

Тоді множина поліномів $\{P_1, \dots, P_n\}$ є алгебраїчно незалежною.

Доведення. Доведемо алгебраїчну незалежність множини поліномів $\{P_1, \dots, P_n\}$. Припустимо, що існує такий поліном $R : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, що

$$R_{\mathcal{P}(X)}(P_1; \dots; P_n) \equiv 0. \quad (3.1)$$

Покажемо, що $R \equiv 0$. Запишемо поліном R у вигляді

$$R(z_1, \dots, z_n) = \sum_{j=0}^J R_j(z_1, \dots, z_n), \quad (3.2)$$

де

$$R_j(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n \\ k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = j}} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$$

для $j \in \{0, \dots, J\}$. Тоді

$$R_{\mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n) = \sum_{j=0}^J R_{j, \mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n).$$

Зауважимо, що для кожного j поліном $R_{j, \mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n)$ є j -однорідною компонентою полінома $R_{\mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n)$. Тому згідно з рівністю (3.1) та лемою 1.1, отримаємо рівність

$$R_{j, \mathcal{P}(X)}(P_1, \dots, P_n) \equiv 0.$$

Тому, за умовою 2, $R_j \equiv 0$ для кожного $j \in \{0, \dots, J\}$. Тоді, з рівності (3.2), $R \equiv 0$. Отже, множина поліномів $\{P_1, \dots, P_n\}$ алгебраїчно незалежна. \square

Лема 3.2. Нехай E це дійсний банахів простір. Нехай $P, Q : E \rightarrow \mathbb{R}$ це поліноми, а їх комплексні продовження $\widehat{P}, \widehat{Q}, \widehat{PQ}$ визначені за означенням 1.3. Тоді $\widehat{P}\widehat{Q} = \widehat{PQ}$.

Доведення. Звуження обох поліномів $\widehat{P}\widehat{Q}$ та \widehat{PQ} на простір E збігаються з поліномом PQ . З твердження 3.1, кожний дійснозначний поліном на E , а тому і поліном PQ , має єдине поліноміальне комплексне продовження. Таким чином, рівність $\widehat{P}\widehat{Q} = \widehat{PQ}$ виконується. \square

Теорема 3.1. Нехай E це дійсний банахів простір. Нехай Γ це множина індексів. Кожному $\gamma \in \Gamma$ поставимо у відповідність деякий m_γ -однорідний неперервний поліном $P_\gamma : E \rightarrow \mathbb{R}$, де $m_\gamma \in \mathbb{Z}_+$. Припустимо, що множина $\{\widehat{P}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, де \widehat{P}_γ це комплексні продовження поліномів P_γ , є алгебраїчно незалежною. Тоді множина $\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ є алгебраїчно незалежною.

Доведення. Нехай Γ_1 це довільна скінченна підмножина множини Γ . Позначимо n кількість елементів множини Γ_1 . Запишемо цю множину як $\Gamma_1 = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$. Перевіримо умови леми 3.1 для простору E та множини $\{P_{\gamma_j} : j \in \{1; \dots; n\}\}$. Перша умова виконується за побудовою поліномів P_{γ_j} . Покажемо, що друга умова виконується. Нехай поліном $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, заданий рівністю

$$Q(z_1, \dots, z_n) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+ \\ k_1 m_1 + \dots + k_n m_n = l}} \alpha_{(k_1, \dots, k_n)} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n},$$

де $l \in \mathbb{Z}_+$ та $\alpha_{(k_1, \dots, k_n)} \in \mathbb{R}$, такий, що $R \equiv 0$, де

$$R = Q_{\mathcal{P}(E; \mathbb{R})}(P_{\gamma_1}, \dots, P_{\gamma_n})$$

(див. рівність (1.7)). Відзначимо, що R це неперервний l -однорідний поліном на просторі E тому, за лемою 3.2 і тим, що сума комплексних продов-

жень деяких поліномів дорівнює комплексному продовженню їхньої суми,

$$\widehat{R} = Q_{\mathcal{P}(\widetilde{E};\mathbb{C})}(\widehat{P}_{\gamma_1}, \dots, \widehat{P}_{\gamma_n}).$$

Нехай A_R це мультилінійне симетричне відображення асоційоване з поліномом R та $A_{\widehat{R}}$ це мультилінійне симетричне відображення асоційоване з поліномом \widehat{R} (див. теорему 1.2). З нерівностей (1.4) та (1.6) отримуємо нерівності

$$\|\widehat{R}\| \leq \|A_{\widehat{R}}\| \leq 2^l \|A_R\| \leq \frac{(2l)^l}{l!} \|R\|.$$

Таким чином, якщо $R \equiv 0$, з цього випливає, що $\widehat{R} \equiv 0$. Тоді, оскільки множина $\{\widehat{P}_{\gamma_1}, \dots, \widehat{P}_{\gamma_n}\}$ алгебраїчно незалежна, то $Q \equiv 0$. Таким чином, друга умова леми 3.1 виконується. Тоді, згідно з лемою 3.1, множина $\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma_1\}$ є алгебраїчно незалежною для кожної скінченної підмножини $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Отже, множина $\{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ є алгебраїчно незалежною. Теорему доведено. \square

Теорема 3.2. *Нехай E це дійсний банахів простір, а \widetilde{E} це комплексифікація простору E . Нехай \widehat{A} це підалгебра алгебри $\mathcal{P}(\widetilde{E};\mathbb{C})$, а A це підалгебра алгебри $\mathcal{P}(E;\mathbb{R})$. Нехай Γ це деяка множина індексів. Нехай $H = \{R_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset A$ деяка множина однорідних (потенційно з різними степенями однорідності) поліномів. Припустимо що наступні дві умови виконуються:*

1. алгебра \widehat{A} містить комплексні продовження всіх елементів алгебри A ,
2. множина $\widehat{H} = \{\widehat{R}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, де поліноми \widehat{R}_γ це комплексні продовження поліномів R_γ , це алгебраїчний базис алгебри \widehat{A} ,

тоді множина H це алгебраїчний базис алгебри A .

Доведення. Достатньо довести, що H це алгебраїчно незалежна система твірних елементів. З теореми 3.1 та алгебраїчної незалежності множини

\widehat{H} , множина H є алгебраїчно незалежною. Покажемо, що множина H є системою твірних елементів. Достатньо довести, що довільний поліном $P \in A$ є алгебраїчною комбінацією елементів множини H з дійсними коефіцієнтами. Розглянемо довільний поліном $P \in A$. Оскільки множина \widehat{H} це алгебраїчний базис алгебри \widehat{A} та $\widehat{P} \in \widehat{A}$, маємо, що поліном \widehat{P} це алгебраїчна комбінація деяких елементів множини \widehat{H} . Тобто, існують такі $n \in \mathbb{N}$, індекси $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma$ та поліном $Q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, що

$$\widehat{P}(z) = Q(\widehat{R}_{\gamma_1}(z), \dots, \widehat{R}_{\gamma_n}(z)) \quad (3.3)$$

для кожного $z \in \widetilde{E}$. Оскільки $Q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ це поліном, існують такі $N \in \mathbb{N}$, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ та $\{k_{p;j}\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $j \in \{1; \dots; N\}$, а $p \in \{1; \dots; n\}$, що

$$\widehat{P}(z) = \sum_{j=1}^N c_j \widehat{R}_{\gamma_1}^{k_{1;j}}(z) \cdot \dots \cdot \widehat{R}_{\gamma_n}^{k_{n;j}}(z) \quad (3.4)$$

для кожного $z \in \widetilde{E}$. Для кожного $x \in E$ та полінома $G : E \rightarrow \mathbb{R}$ такого, що $G \in A$, виконується рівність

$$G(x) = \widehat{G}(x + 0 \cdot i). \quad (3.5)$$

Підставимо $z = x + 0 \cdot i$ в рівність (3.4). Тоді з рівності (3.5) випливає рівність

$$P(x) = \sum_{j=1}^N c_j R_{\gamma_1}^{k_{1;j}}(x) \cdot \dots \cdot R_{\gamma_n}^{k_{n;j}}(x) \quad (3.6)$$

для кожного $x \in E$. Тоді, щоб показати, що поліном P це алгебраїчна комбінація елементів множини $R_{\gamma_1}, \dots, R_{\gamma_n}$, достатньо довести, що $c_j \in \mathbb{R}$ для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. Оскільки $P(x), R_{\gamma_j}(x) \in \mathbb{R}$ для кожного $x \in E$, отримуємо рівності $P(x) = \overline{P(x)}$ та $R_{\gamma_j}(x) = \overline{R_{\gamma_j}(x)}$ для кожного $x \in E$. Отже, з рівності (3.6),

$$P(x) = \sum_{j=1}^N \overline{c_j} R_{\gamma_1}^{k_{1;j}}(x) \cdot \dots \cdot R_{\gamma_n}^{k_{n;j}}(x). \quad (3.7)$$

Віднімаючи рівність (3.7) від рівності (3.6), отримуємо

$$2i \left(\sum_{j=1}^N (\operatorname{Im} c_j) R_{\gamma_1}^{k_{1;j}}(x) \cdot \dots \cdot R_{\gamma_n}^{k_{n;j}}(x) \right) = 0$$

для кожного $x \in E$. Оскільки множина H є алгебраїчно незалежною, з рівності вище випливає, що $\operatorname{Im} c_j = 0$ для кожного $j \in \{1; \dots; N\}$. Отже, $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$. Таким чином, поліном P це алгебраїчна комбінація поліномів $R_{\gamma_1}, \dots, R_{\gamma_n}$. Тоді ми довели, що множина H — система твірних елементів алгебри A .

Отже, множина H це алгебраїчний базис алгебри A . Теорему доведено. \square

З цієї теорема випливає наступний наслідок.

Наслідок 3.1. *Нехай E це дійсний банахів простір, а \tilde{E} це комплексифікація простору E . Нехай S це деяка множина операторів, що діють з E до E та \hat{S} це деяка множина операторів, що діють з \tilde{E} до \tilde{E} . Нехай \hat{A} це алгебра всіх \hat{S} -симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі \tilde{E} , а A це алгебра всіх S -симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі E . Нехай Γ це деякий набір індексів. Нехай $H = \{P_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset A$ це деякий набір однорідних (потенційно, з різними степенями однорідності) поліномів. Якщо дві наступні умови виконуються:*

1. *множини S та \hat{S} такі, що комплексне продовження кожного S -симетричного неперервного дійснозначного полінома це \hat{S} -симетричний неперервний комплекснозначний поліном,*
2. *множина $\hat{H} = \{\hat{P}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, де поліноми \hat{P}_γ це комплексні продовження поліномів P_γ , це алгебраїчний базис алгебри \hat{A} ,*

то множина H це алгебраїчний базис алгебри A .

Доведення. Застосуємо теорему 3.2 до простору E , алгебр A та \hat{A} і множини H . Обидві умови теорема 3.2 безпосередньо випливають з відповідних умов наслідку. \square

3.2. Алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом

В цьому підрозділі буде доведено дійсний аналог теореми 2.10, тобто встановлено, що алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних дійснозначних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, це множина $\left\{ R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n} \right\}$, де поліноми $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$ визначені за допомогою рівності (2.12), а множина $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ визначена за допомогою рівності (2.11).

Нехай $p_1, \dots, p_n \in [1; +\infty)$.

Лема 3.3. *Комплексифікація простору $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ збігається з простором $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ та норма $\|\cdot\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}}$ це природна норма комплексифікації (див. означення 1.2) для норми $\|\cdot\|_{L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}}$, де $\|\cdot\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}}$ та $\|\cdot\|_{L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}}$ визначені за допомогою означення (1.12).*

Доведення. Покажемо, що існує лінійна бієкція між комплексифікацією $(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}) \times (L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})$ простору $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ (див. означення 1.1) та простором $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Нехай $f((x; y)) = x + iy$, де $x, y \in L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Тоді f це ін'єктивна лінійна функція, що діє з простору $(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}) \times (L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})$ в простір $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Покажемо, що f — сюр'єктивна функція. Нехай $z = (z_1; \dots; z_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Побудуємо таку пару $x, y \in L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, що $f((x; y)) = z$. Нехай $x = (\operatorname{Re} z_1; \dots; \operatorname{Re} z_n)$ та $y = (\operatorname{Im} z_1; \dots; \operatorname{Im} z_n)$. Тоді $x, y \in L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Крім того, $f((x; y)) = z$. Таким чином, f це сюр'єкція. Тоді f це лінійна бієкція між просторами $(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}) \times (L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})$ та $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Легко перевірити, що обидві умови з означення 1.1 виконуються. Тоді про-

стір $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ це комплексифікація простору $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$.

Покажемо, що $\|\cdot\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}}$ це природна норма комплексифікації для $\|\cdot\|_{L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}}$. Для кожного $z = (z_1; \dots; z_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ маємо рівності

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} z\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}} &= \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \|\operatorname{Re} z_j\|_{L_{p_j}} = \\ &= \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \left(\int_0^1 |\operatorname{Re} z_j(t)|^{p_j} dt \right)^{\frac{1}{p_j}} = \\ &= \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \|\operatorname{Re} z_j\|_{L_{p_j}^{(\mathbb{R})}} = \|\operatorname{Re} z\|_{L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}}. \end{aligned}$$

Таким чином, перша умова з означення 1.2 виконується. Для кожного $z = (z_1; \dots; z_n) \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ виконуються рівності

$$\begin{aligned} \|z\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}} &= \max_{i \in \{1; \dots; n\}} \|z_i\|_{L_{p_i}} = \\ &= \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \left(\int_0^1 |z_j(t)|^{p_j} dt \right)^{\frac{1}{p_j}} = \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \left(\int_0^1 |\bar{z}_j(t)|^{p_j} dt \right)^{\frac{1}{p_j}} = \\ &= \max_{j \in \{1; \dots; n\}} \|\bar{z}_j\|_{L_{p_j}} = \|\bar{z}\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}}. \end{aligned}$$

Отже, друга умова з означення 1.2 виконується. Таким чином, $\|\cdot\|_{L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}}$ це природна норма комплексифікації для $\|\cdot\|_{L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}}$. Лему доведено. \square

За теоремою 1.2, для комплексного продовження $\widehat{P} : L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ кожного m -однорідного симетричного полінома $P : L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$, відповідне m -лінійне симетричне відображення $A_{\widehat{P}} : \left(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \right)^m \rightarrow \mathbb{C}$, асоційоване з поліномом \widehat{P} , може бути знайдене за допомогою формули:

$$A_{\widehat{P}}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1 + \dots + j_m} A_P(w_{j_1}(x_1), \dots, w_{j_m}(x_m)) \quad (3.8)$$

для $x_1, \dots, x_m \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$, де A_P це симетричне m -лінійне відображення, асоційоване з поліномом P , та

$$w_0(x_k) = (\operatorname{Re} x_{k;1}; \dots; \operatorname{Re} x_{k;n}), \quad (3.9)$$

$$w_1(x_k) = (\operatorname{Im} x_{k;1}; \dots; \operatorname{Im} x_{k;n}) \quad (3.10)$$

для кожного $x_k = (x_{k,1}; \dots; x_{k,n})$, де $k \in \{1; \dots; m\}$. Тоді

$$\widehat{P}(z) = A_{\widehat{P}}(z, \dots, z) \quad (3.11)$$

для кожного $z \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$.

Лема 3.4. Нехай $P : L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ це симетричний m -однорідний поліном. Тоді для симетричного асоційованого з поліномом P m -лінійного відображення $A_P : (L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})^m \rightarrow \mathbb{R}$ наступна рівність виконується

$$A_P(x_1, \dots, x_m) = A_P(x_1 \circ \sigma, \dots, x_m \circ \sigma)$$

для кожних $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ та $x_j \in L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, де $j \in \{1; \dots; m\}$.

Доведення. Нехай $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ та $x_1, \dots, x_m \in L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Для кожних $j_1, \dots, j_m \in \{-1; 1\}$ виконується рівність

$$(j_1 x_1 + \dots + j_m x_m) \circ \sigma = j_1 (x_1 \circ \sigma) + \dots + j_m (x_m \circ \sigma).$$

Тоді, оскільки поліном P симетричний,

$$P(j_1 x_1 + \dots + j_m x_m) = P(j_1 (x_1 \circ \sigma) + \dots + j_m (x_m \circ \sigma)) \quad (3.12)$$

для кожних $j_1, \dots, j_m \in \{-1; 1\}$. З рівностей (1.2) та (3.12) отримуємо рівність.

$$A_P(x_1, \dots, x_m) = A_P(x_1 \circ \sigma, \dots, x_m \circ \sigma).$$

Лему доведено. □

Лема 3.5. Для кожного неперервного полінома $R : L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ його звуження на простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ теж неперервне.

Доведення. Нехай $R : L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ це неперервний поліном. Тоді $\|R\| < \infty$. Звідси випливає, що норма звуження полінома R на простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ теж скінченна. Це означає, що звуження полінома R на простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ є неперервним. □

Лема 3.6. Для кожного симетричного (тобто, $G_{p_1, \dots, p_n}^{(\mathbb{C})}$ -симетричного) відображення $Q : L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ його звуження на $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ є симетричним (тобто $G_{p_1, \dots, p_n}^{(\mathbb{R})}$ -симетричним).

Доведення. Нехай $Q : L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ це симетричне відображення. Покажемо, що звуження відображення Q на простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ симетричне. Розглянемо довільне відображення $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$. Для кожного $z \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ виконується рівність $Q(z) = Q(z \circ \sigma)$. Отже,

$$Q(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z) = Q((\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z) \circ \sigma) \quad (3.13)$$

для кожного $z \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Розглянемо довільний елемент $x \in L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Нехай $z_1 = x + i \cdot 0$. З рівності (3.13) випливають рівності

$$Q(x) = Q(\operatorname{Re} z_1 + i\operatorname{Im} z_1) = Q((\operatorname{Re} z_1 + i\operatorname{Im} z_1) \circ \sigma) = Q(x \circ \sigma)$$

для довільних $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$ та $x \in L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Ліва сторона цієї рівності це звуження відображення Q на простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Отже, звуження відображення Q на простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ є симетричним. \square

Лема 3.7. Для кожного симетричного (тобто, $G_{p_1, \dots, p_n}^{(\mathbb{R})}$ -симетричного) неперервного полінома $P : L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$, його комплексне продовження $\widehat{P} : L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n} \rightarrow \mathbb{C}$ є симетричним (тобто, $G_{p_1, \dots, p_n}^{(\mathbb{C})}$ -симетричним) та неперервним.

Доведення. З твердження 3.1, комплексне продовження кожного неперервного полінома неперервне, отже, поліном \widehat{P} неперервний. Покажемо, що комплексне продовження симетричного неперервного полінома, що діє з простору $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ у простір \mathbb{R} є симетричним. За означенням 1.3, достатньо довести це для кожної його однорідної компоненти. За лемою 1.1, кожна однорідна компонента полінома P є симетричною. Тоді, достатньо довести, що комплексне продовження довільного однорідного симетричного неперервного полінома буде симетричним. Нехай t це довільне ціле

невід'ємне число та P_m це довільний m -однорідний симетричний неперервний поліном, що діє з простору $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ у простір \mathbb{R} . Нехай $\sigma \in \Xi_{[0;1]}$. Відзначимо, що для кожного $x_j \in L_{p_j}$ рівності $\operatorname{Re}(x_j(\sigma(t))) = (\operatorname{Re} x_j)(\sigma(t))$ та $\operatorname{Im}(x_j(\sigma(t))) = (\operatorname{Im} x_j)(\sigma(t))$ виконуються для кожного $t \in [0; 1]$. Отже, для кожного $x \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ виконуються рівності

$$w_0(x \circ \sigma) = w_0(x) \circ \sigma \text{ та } w_1(x \circ \sigma) = w_1(x) \circ \sigma, \quad (3.14)$$

де w_0 та w_1 визначені за допомогою рівностей (3.9) та (3.10) відповідно.

З рівностей (3.11), (3.8), (3.14) та леми 3.4 отримуємо рівності

$$\begin{aligned} \widehat{P}_m(z \circ \sigma) &= A_{\widehat{P}_m}(z \circ \sigma, \dots, z \circ \sigma) = \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1+\dots+j_m} A_{P_m}(w_{j_1}(z \circ \sigma), \dots, w_{j_m}(z \circ \sigma)) = \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1+\dots+j_m} A_{P_m}(w_{j_1}(z) \circ \sigma, \dots, w_{j_m}(z) \circ \sigma) = \\ &= \sum_{j_1=0}^1 \dots \sum_{j_m=0}^1 i^{j_1+\dots+j_m} A_{P_m}(w_{j_1}(z), \dots, w_{j_m}(z)) = \widehat{P}_m(z) \end{aligned} \quad (3.15)$$

для кожного $z \in L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Отже, поліном \widehat{P}_m симетричний. Тоді, комплексне продовження кожного симетричного неперервного полінома, що діє з простору $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ у простір \mathbb{R} є симетричним. Лему доведено. \square

Лема 3.8. *Нехай $\alpha \in \mathfrak{N}_{p_1, \dots, p_n}$, де множина $\mathfrak{N}_{p_1, \dots, p_n}$ визначена за означенням (2.11). Нехай поліноми $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$ та $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ визначені рівністю (2.12). Тоді*

1. *комплексне продовження полінома $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$ збігається з поліномом $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$;*
2. *поліном $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$ симетричний та неперервний;*
3. $\left\| R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} \right\| = 1$.

Доведення. Доведемо першу властивість. Звуження полінома $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$ на простір $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ збігається з поліномом $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$. За теоремою 1.1, однорідний поліном $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$ може бути єдиним чином продовжений до неперервного полінома, що діє з простору $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ у простір \mathbb{C} . Отже, його комплексне продовження це поліном $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$.

Доведемо другу властивість. Вона відразу випливає з лем 3.5 та 3.6, застосованих для полінома $R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})}$, що є неперервним та симетричним за теоремами 2.2 та 2.3.

Доведемо третю частину. За теоремою 2.2,

$$\left\| R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} \right\| = 1.$$

Оскільки норма звуження не більша за норму полінома, то

$$\left\| R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} \right\| \leq \left\| R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} \right\|,$$

таким чином,

$$\left\| R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} \right\| \leq 1. \quad (3.16)$$

З іншого боку, $\|(t \mapsto 1; t \mapsto 1; \dots; t \mapsto 1)\|_{L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}} = 1$ та $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}((t \mapsto 1; t \mapsto 1; \dots; t \mapsto 1)) = 1$. Отже,

$$\left\| R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} \right\| \geq 1. \quad (3.17)$$

З нерівностей (3.16) та (3.17) випливає рівність

$$\left\| R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} \right\| = 1.$$

Лему доведено. □

Теорема 3.3. *Нехай $p_1; \dots; p_n \in [1; +\infty)$. Множина поліномів $\{R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1, \dots, p_n}\}$, де поліноми $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$ визначені за допомогою рівностей (2.12) та множина $\mathfrak{N}_{p_1, \dots, p_n}$ визначається за означенням (2.11), це алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$.*

Доведення. Перевіримо умови наслідку 3.1 для простору $E = L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, множин $S = G_{p_1, \dots, p_n}^{(\mathbb{R})}$ та $\widehat{S} = G_{p_1, \dots, p_n}^{(\mathbb{C})}$, A — алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$, \widehat{A} — алгебри всіх симетричних неперервних комплекснозначних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ та множини $H = \{R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}\}$.

За лемою 3.3, комплексифікація простору $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ збігається з простором $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$.

Покажемо, що H це підмножина алгебри A . Достатньо довести, що для довільного $\alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}$ поліном $R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})}$ є симетричним та неперервним. Це відразу випливає з другої властивості леми 3.8.

За лемою 3.7, комплексні продовження симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ це симетричні неперервні комплекснозначні поліноми на просторі $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$. Таким чином, перша умова наслідку 3.1 виконується.

За першою властивістю леми 3.8, множина \widehat{H} комплексних продовжень елементів множини H збігається з множиною $\{R_\alpha^{(L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n})} : \alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}\}$, що, за теоремою 2.10, є алгебраїчним базисом алгебри \widehat{A} . Отже, друга умова наслідку 3.1 виконується.

Тоді з наслідку 3.1 випливає, що множина $\{R_\alpha^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}\}$ це алгебраїчний базис алгебри всіх симетричних неперервних дійснозначних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. \square

В підрозділі 3.1 побудовано алгебраїчний базис підалгебри алгебри дійснозначних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі E , для якої існує деяка підалгебра алгебри комплекснозначних неперервних поліномів на просторі \widetilde{E} — комплексифікації простору E , яка має алгебраїчний базис та містить комплексні продовження всіх елементів початкової підалгебри.

Результати підрозділу 3.1 було використано в підрозділі 3.2., де у ро-

лі простору E було використано декартів добуток $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, а в ролі підалгебри — алгебру симетричних неперервних поліномів на просторі $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$. Було доведено аналог теореми 2.10, тобто встановлено, що алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ це множина $\left\{ R_{\alpha}^{(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \mathfrak{N}_{p_1; \dots; p_n} \right\}$.

Результати третього розділу опубліковані в статтях [71, 72]. Вони також доповідалися на науковій конференції [74] та наукових семінарах.

РОЗДІЛ 4. Спектри та ізоморфізми деяких алгебр цілих функцій на банахових просторах

Метою цього розділу є дослідження алгебр цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартових добутках дійсних чи комплексних просторів функцій інтегровних за Лебегом та спектрів цих алгебр.

4.1. Спектр алгебри цілих симетричних неперервних комплекснозначних функцій на декартовому добутку комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом

Метою цього підрозділу є дослідження алгебри цілих симетричних неперервних комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, знаходження її спектра та доведення ізоморфності між цією алгеброю та алгеброю цілих функцій на деякому декартовому степеню простору \mathbb{C} .

Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $p_1, \dots, p_n \in [1; +\infty)$. Нехай простір L визначений за означенням (1.13).

Лема 4.1. *Алгебра $H_{bs}(L)$ є замкненою підалгеброю алгебри Фреше $H_b(L)$.*

Доведення. Згідно з лемою 1.4, якщо послідовність симетричних функцій $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H_b(L)$ збігається до $f \in H_b(L)$, то функція f симетрична. Тому $H_{bs}(L)$ це замкнена підалгебра алгебри $H_b(L)$. Лему доведено. \square

Лема 4.2. *Існує таке $C > 0$, що для кожного $z = (z_k)_{k \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}} \in \mathbb{C}^{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|}$, де множина \aleph_{p_1, \dots, p_n} визначена за означенням (2.11), існує такий елемент*

$x_z \in L$, що $\|x_z\|_L \leq C \max_{k \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}} |z_k|$ та $R_k(x_z) = z_k$ для кожного $k \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}$.

Доведення. Відразу випливає з леми 1.3. □

З інтегральної формули Коші [39, наслідок 7.3, с. 47] випливає наступний наслідок:

Наслідок 4.1. *Нехай $f \in H_{bs}(L)$. Тоді кожний елемент ряду Тейлора функції f це симетричний неперервний однорідний поліном.*

З теореми 2.10 та наслідку 4.1 випливає наступне твердження:

Наслідок 4.2. *Нехай $f \in H_{bs}(L)$. Тоді кожний елемент ряду Тейлора функції f може бути однозначно поданий як алгебраїчна комбінація поліномів R_α , де $\alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}$ та множина \aleph_{p_1, \dots, p_n} задана означенням (2.11).*

Теорема 4.1. (а) *Алгебра Фреше $H_{bs}(L)$ ізоморфна до алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|})$. Більш того, існує такий неперервний ізоморфізм $\xi : H_{bs}(L) \rightarrow H(\mathbb{C}^{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|})$, що для кожного $j \in \{1; \dots; |\aleph_{p_1, \dots, p_n}|\}$ функція $\xi(R_{\alpha_j})$, де мультиіндекс α_j заданий за допомогою впорядкування (2.35), це координатний функціонал, а конкретно, $\xi(R_{\alpha_j})(z) = z_j$ для кожного $z = (z_1; \dots; z_{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|}) \in \mathbb{C}^{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|}$.*

(б) *Спектр алгебри Фреше $H_{bs}(L)$ збігається з множиною всіх функціоналів обчислення значень в точках простору L .*

Доведення. Підставимо $X = L$, $H_\Gamma = H_{bs}(L)$ та $\Gamma = \{R_\alpha : \alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}\}$ в теорему 1.5. Перевіримо, що умови теореми 1.5 виконуються. Оскільки R_α це неперервний $|\alpha|$ -однорідний поліном для кожного $\alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}$, перша умова теореми задовольняється.

З леми 4.2 випливає, що друга умова теореми задовольняється.

З наслідку 4.1, $H_{bs}(L)$ це замкнена підалгебра алгебри $H_b(L)$. З наслідку 4.2, кожний член ряду Тейлора кожної функції $f \in H_{bs}(L)$ може бути однозначно поданий як алгебраїчна комбінація поліномів R_α , де $\alpha \in \aleph_{p_1, \dots, p_n}$. Будь-який елемент алгебри $H_b(L)$ такий, що кожний член його

ряду Тейлора симетричний, є симетричним. Отже, третя умова задовольняється.

Тоді, за теоремою 1.5, алгебра Фреше $H_{bs}(L)$ є ізоморфною до алгебри Фреше $H(\mathbb{C}^{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|})$, більш того, існує такий неперервний ізоморфізм $\xi : H_{bs}(L) \rightarrow H(\mathbb{C}^{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|})$, що для кожного $j \in \{1; \dots; |\aleph_{p_1, \dots, p_n}|\}$ функція $\xi(R_{\alpha_j})$ це координатний функціонал, а конкретно, $\xi(R_{\alpha_j})(z) = z_j$ для кожного $z = (z_1; \dots; z_{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|}) \in \mathbb{C}^{|\aleph_{p_1, \dots, p_n}|}$, а спектр алгебри Фреше $H_{bs}(L)$ збігається з множиною всіх функціоналів обчислення значень в точках простору L . Теорему доведено. \square

4.2. Конструкція деякої алгебри $A(X)$ на дійсному банаховому просторі X , яка є аналогом алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі, породженої скінченною кількістю поліномів

В цьому підрозділі на дійсному банаховому просторі X буде побудовано деякий дійсний аналог $A(X)$ алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексифікації простору X , породженої деякою скінченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів. Буде досліджено структуру елементів алгебри $A(X)$.

Нехай X це дійсний банахів простір, а \tilde{X} це комплексифікація простору X , наділена природною нормою комплексифікації. Нехай $\check{\mathcal{P}}_0$ це підалгебра алгебри $\mathcal{P}(\tilde{X}; \mathbb{C})$ та \mathcal{P}_0 це підалгебра алгебри $\mathcal{P}(X; \mathbb{R})$. Нехай $\aleph \subset \mathbb{Z}_+^n \setminus \{(0; \dots; 0)\}$, для деякого натурального n , це скінченна множина індексів. Нехай $Q = \{Q_\gamma : \gamma \in \aleph\}$ це така підмножина алгебри $\mathcal{P}(X; \mathbb{R})$, що для кожного $\gamma \in \aleph$ поліном Q_γ буде $|\gamma|$ -однорідним. Нехай виконуються

наступні дві умови:

алгебра $\check{\mathcal{P}}_0$ містить комплексні продовження всіх елементів алгебри \mathcal{P}_0 ;

(4.1)

множина $\widehat{Q} = \{\widehat{Q}_\gamma : \gamma \in \mathbb{N}\}$, де поліном \widehat{Q}_γ це комплексне продовження полінома Q_γ , це алгебраїчний базис алгебри $\check{\mathcal{P}}_0$. (4.2)

Лема 4.3. Множина Q це алгебраїчний базис алгебри \mathcal{P}_0 .

Доведення. Лема відразу випливає з теореми 3.2. □

Означення 4.1. Нехай $H_{bQ}(\tilde{X})$ це підмножина $H_b(\tilde{X})$, що складається з усіх таких функцій $f \in H_b(\tilde{X})$, що кожний член ряду Тейлора функції f це елемент алгебри $\check{\mathcal{P}}_0$.

Лема 4.4. Множина $H_{bQ}(\tilde{X})$ це підалгебра алгебри $H_b(\tilde{X})$.

Доведення. Нехай $f, g \in H_{bQ}(\tilde{X})$. Елементи з номером j рядів Тейлора як функції f так і функції g є елементами алгебри $\check{\mathcal{P}}_0$ для кожного цілого невід'ємного j , тобто,

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} P_j^{(f)} \quad \text{та} \quad g = \sum_{j=0}^{+\infty} P_j^{(g)},$$

де $P_j^{(f)}, P_j^{(g)} \in \check{\mathcal{P}}_0$ для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, оскільки $\check{\mathcal{P}}_0$ це алгебра, кожний член рядів Тейлора функцій $f+g$, fg та αf для кожного $\alpha \in \mathbb{C}$ є елементом алгебри $\check{\mathcal{P}}_0$. Отже, $f+g, fg, \alpha f \in H_{bQ}(\tilde{X})$. Лему доведено. □

Для кожного $f \in H_{bQ}(\tilde{X})$ та $n \in \mathbb{N}$ визначимо

$$\|f\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n} = \sup_{\|x\|_{\tilde{X}} \leq n} |f(x)|. \quad (4.3)$$

Відзначимо, що норма (4.3) це звуження норми (1.8) на підалгебру $H_{bQ}(\tilde{X})$.

Визначимо метрику ρ на підалгебрі $H_{bQ}(\tilde{X})$ за допомогою рівності:

$$\rho(f_1; f_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f_1 - f_2\|_{H_{bQ}(\tilde{X});j}}{1 + \|f_1 - f_2\|_{H_{bQ}(\tilde{X});j}} \quad (4.4)$$

для кожних $f_1, f_2 \in H_{bQ}(\tilde{X})$.

Для кожної скінченної непорожньої множини $M \subset \mathbb{Z}_+^n$ та кожного відображення $l : M \rightarrow \mathbb{Z}_+$ нехай

$$\chi(l, M) = \sum_{k \in M} |k| l(k). \quad (4.5)$$

Теорема 4.2. *Кожна функція $f \in H_{bQ}(\tilde{X})$ може бути єдиним чином подана у вигляді*

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (\hat{Q}_k(x))^{l(k)},$$

де $c_l \in \mathbb{C}$ та $x \in \tilde{X}$.

Доведення. Кожна функція $f \in H_{bQ}(\tilde{X})$ єдиним чином може бути подана у вигляді

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} P_N(x),$$

де P_N це N -однорідний поліном. За означенням алгебри $H_{bQ}(\tilde{X})$, $P_N \in \check{P}_0$ для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, враховуючи, що множина \hat{Q} це алгебраїчний базис алгебри \check{P}_0 , кожний поліном P_N може бути єдиним чином поданий як алгебраїчна комбінація поліномів \hat{Q}_k , $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$P_N = \sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (\hat{Q}_k(x))^{l(k)} \quad (4.6)$$

для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$. Таким чином, функція f може бути єдиним чином подана у вигляді

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (\hat{Q}_k(x))^{l(k)},$$

де $c_l \in \mathbb{C}$ та $x \in \tilde{X}$. Теорему доведено. \square

Означення 4.2. Нехай $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ це підмножина всіх таких $f \in H_{bQ}(\tilde{X})$, що

$$f(x) \in \mathbb{R} \text{ для кожного } x \in \tilde{X} \text{ такого, що } \text{Im } x = 0. \quad (4.7)$$

Лема 4.5. Множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ це замкнена підмножина алгебри $H_{bQ}(\tilde{X})$ і наступні властивості виконуються:

1. Для кожного $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ та $\alpha \in \mathbb{R}$ функція αf є елементом множини $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$.
2. Для кожних $f, g \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ функція $f + g$ є елементом множини $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$.
3. Для кожних $f, g \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ функція fg є елементом множини $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$.

Доведення. З умови (4.7) випливає, що $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ для кожних $f, g \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ та $x \in \tilde{X}$ таких, що $\text{Im } x = 0$. Тоді $f(x)g(x) \in \mathbb{R}$, $f(x) + g(x) \in \mathbb{R}$ та $\alpha f(x) \in \mathbb{R}$ для кожного $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, перша, друга і третя властивості виконуються.

Доведемо, що множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ є замкненою. Нехай $f_1, \dots, f_k, \dots \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ це така послідовність функцій, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$, де $f \in H_{bQ}(\tilde{X})$. Тоді з умови (4.7) випливає, що $f_k(x) \in \mathbb{R}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$ та $x \in \tilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$. Збіжна послідовність дійсних чисел завжди збігається до дійсного числа. Отже, $f(x) \in \mathbb{R}$ для кожного $x \in \tilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$. Таким чином, $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. Тоді множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ замкнена. Лему доведено. \square

Лема 4.6. Нехай $U \in \{\{0\}, \mathbb{R}\}$. Нехай $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ така, що $f(x) \in U$ для кожного $x \in \tilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$. Тоді всі коефіцієнти c_i з розкладу функції f , отриманого згідно з теоремою 4.2, належать множині U .

Доведення. В обох можливих варіантах множини U , тобто як у випадку $U = \{0\}$, так і у випадку $U = \mathbb{R}$, виконується наступне твердження:

$$au_1 \in U, u_1 - u_2 \in U \text{ та } u_1 + u_2 \in U \text{ для кожних } u_1, u_2 \in U \text{ та } a \in \mathbb{R}. \quad (4.8)$$

За теоремою 4.2,

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} P_N(x), \quad (4.9)$$

де

$$P_N(x) = \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (\widehat{Q}_k(x))^{l(k)} \quad (4.10)$$

для кожних $N \in \mathbb{Z}_+$ та $x \in \widetilde{X}$, де всі c_l це деякі комплексні числа.

Покажемо, що кожне c_l належить множині U . По-перше, доведемо, що

$$P_N(x) \in U \quad (4.11)$$

для кожних $N \in \mathbb{Z}_+$ та $x \in \widetilde{X}$ таких, що $\text{Im } x = 0$. Припустимо, що це не так. Тоді існує таке $j \in \mathbb{Z}_+$, що $P_j(x) \notin U$ для деякого $x \in \widetilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$. Нехай j_0 це найменший серед таких номерів j . Тоді $P_n(x) \in U$ для кожних $n < j_0$ та $x \in \widetilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$. Нехай $x_0 \in \widetilde{X}$ такий елемент, що $\text{Im } x_0 = 0$ та $P_{j_0}(x_0) \notin U$. Оскільки, як у випадку $U = \{0\}$, так і у випадку $U = \mathbb{R}$, множина U замкнена, виконується нерівність

$$\text{dist}(P_{j_0}(x_0); U) > 0, \quad (4.12)$$

де

$$\text{dist}(z; T) = \inf_{t \in T} |z - t| \quad (4.13)$$

для кожних $z \in \mathbb{C}$ та $T \subset \mathbb{C}$. Нехай

$$q_j = P_j(x_0) \quad (4.14)$$

для кожного $j \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки $q_{j_0} = P_{j_0}(x_0)$, з нерівності (4.12) отримуємо, що

$$\text{dist}(q_{j_0}; U) > 0. \quad (4.15)$$

Відзначимо, що

$$q_t \in U \text{ для кожного } t \in \{0; \dots; j_0 - 1\}. \quad (4.16)$$

З m -однорідності полінома P_m випливає рівність,

$$P_m\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{P_m(x)}{a^m}$$

для кожних $m \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \tilde{X}$ та $a > 0$. Тоді, використовуючи рівність (4.9), отримуємо рівність

$$f\left(\frac{x}{a}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{P_j(x)}{a^j} \quad (4.17)$$

для кожних $a > 0$ та $x \in \tilde{X}$. Оскільки елемент $x_0 \in \tilde{X}$ такий, що $\text{Im } x = 0$, легко зрозуміти, що $\frac{x_0}{a} \in \tilde{X}$ та $\text{Im } \frac{x_0}{a} = 0$ для кожного $a > 0$. Відповідно, за умовою леми

$$f\left(\frac{x_0}{a}\right) \in U. \quad (4.18)$$

З рівностей (4.9) та (4.14), ряд $\sum_{j=0}^{\infty} q_j$ збіжний. Тоді, з нерівності (4.15) випливає, що існує таке $m > j_0$, $m \in \mathbb{N}$, що

$$|q_n| < \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4} \quad (4.19)$$

для кожних $n > m$, $n \in \mathbb{N}$. Нехай $A \in [4; +\infty)$ таке, що

$$\frac{|q_j|}{A} < \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4} \quad (4.20)$$

для кожного $j \in \{j_0 + 1, \dots, m\}$.

З (4.18) і рівностей (4.17) та (4.14) випливає

$$U \ni f\left(\frac{x_0}{A}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{P_j(x_0)}{A^j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j}. \quad (4.21)$$

З (4.16) та (4.8) випливає, що

$$\sum_{j=0}^{j_0-1} \frac{q_j}{A^j} \in U. \quad (4.22)$$

З (4.21), (4.22) та (4.8) випливає, що

$$u_0 \in U, \quad (4.23)$$

де

$$u_0 = \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j}. \quad (4.24)$$

З нерівностей (4.15), (4.20), нерівності $A \geq 4$ та властивостей геометричної прогресії,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=j_0+1}^m \frac{q_j}{A^j} \right| &\leq \sum_{j=j_0+1}^m \frac{|q_j|}{A^j} < \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4A^{j_0}} \left(1 + \frac{1}{A} + \dots + \frac{1}{A^{m-1-j_0}} \right) < \\ &< \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4A^{j_0}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-1-j_0}} \right) < \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4A^{j_0}} \cdot 2 = \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{2A^{j_0}}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

З нерівностей (4.15), (4.19), нерівності $A \geq 4$, властивостей геометричної прогресії та нерівності $m \geq j_0$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j} \right| &\leq \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{|q_j|}{A^j} < \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4A^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{A^2} + \dots \right) < \\ &< \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4A^{m+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) = \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{4A^{m+1}} \cdot 2 = \\ &= \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{2A^{m+1}} < \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{2A^{j_0}}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В обох можливих варіантах множини U , як у випадку $U = \{0\}$, так і у випадку $U = \mathbb{R}$, рівність

$$\text{dist}\left(\frac{z}{a}; U\right) = \frac{\text{dist}(z; U)}{a}$$

виконується для кожних $z \in \mathbb{C}$ та $a > 0$. Тоді

$$\text{dist}\left(\frac{q_{j_0}}{A^{j_0}}; U\right) = \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{A^{j_0}}. \quad (4.27)$$

З нерівностей (4.25) і (4.26) та рівності (4.27) випливає, що

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j} \right| &\leq \left| \sum_{j=j_0+1}^m \frac{q_j}{A^j} \right| + \left| \sum_{j=m+1}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j} \right| < \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{2A^{j_0}} + \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{2A^{j_0}} = \\ &= \frac{\text{dist}(q_{j_0}; U)}{A^{j_0}} = \text{dist}\left(\frac{q_{j_0}}{A^{j_0}}; U\right). \end{aligned}$$

Отже,

$$\left| \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j} \right| < \text{dist} \left(\frac{q_{j_0}}{A^{j_0}}; U \right). \quad (4.28)$$

З рівності (4.24),

$$\frac{q_{j_0}}{A^{j_0}} = u_0 - \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j}. \quad (4.29)$$

З рівності (4.13), властивості (4.23) та рівності (4.29) випливає, що

$$\text{dist} \left(\frac{q_{j_0}}{A^{j_0}}; U \right) = \inf_{u \in U} \left| \frac{q_{j_0}}{A^{j_0}} - u \right| \leq \left| \frac{q_{j_0}}{A^{j_0}} - u_0 \right| = \left| \sum_{j=j_0+1}^{+\infty} \frac{q_j}{A^j} \right|. \quad (4.30)$$

Нерівності (4.28) та (4.30) суперечать одна одній. Таким чином, властивість (4.11) доведено, тобто, використовуючи рівність (4.10), отримуємо, що,

$$\sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} c_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (\widehat{Q}_k(x))^{l(k)} \in U$$

для кожного $x \in \widetilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$ та кожного $N \in \mathbb{Z}_+$. Відзначимо, що $\widehat{Q}_k(x) = Q_k(\phi(x))$ для кожного $x \in \widetilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$ та кожного $k \in \mathbb{N}$, де відображення ϕ задане рівністю (1.5). Тоді

$$\sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} c_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (Q_k(\phi(x)))^{l(k)} \in U$$

для кожного $x \in \widetilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$. Оскільки відображення ϕ є сюр'єктивним, то

$$\sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} c_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (Q_k(y))^{l(k)} \in U$$

для кожних $y \in X$ та $N \in \mathbb{Z}_+$. Нехай $a_l = \text{Re } c_l$, $b_l = \text{Im } c_l$. Тоді $c_l = a_l + ib_l$ і властивість

$$\sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} a_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (Q_k(y))^{l(k)} + i \sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} b_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (Q_k(y))^{l(k)} \in U \quad (4.31)$$

виконується для кожних $y \in X$ та $N \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ це множина дійснозначних поліномів та $U \subset \mathbb{R}$, рівність

$$\sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} b_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (Q_k(y))^{l(k)} = 0$$

виконується для кожних $y \in X$ та $N \in \mathbb{Z}_+$. За лемою 4.3, множина $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ є алгебраїчно незалежною, а деяка алгебраїчна комбінація елементів цієї множини в рівності вище дорівнює нулю. Тоді всі коефіцієнти b_l дорівнюють нулю. Тобто, всі коефіцієнти c_l є дійсними. У випадку $U = \mathbb{R}$ твердження леми доведено. Розглянемо випадок $U = \{0\}$. Тоді, з рівності (4.31), та того, що всі коефіцієнти b_l , дорівнюють нулю отримуємо, що рівність

$$\sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} a_l \prod_{k \in \mathbb{N}} (Q_k(y))^{l(k)} = 0$$

виконується для кожних $y \in X$ та $N \in \mathbb{Z}_+$. За лемою 4.3, множина $\{Q_k : k \in \mathbb{N}\}$ є алгебраїчно незалежною, а деяка алгебраїчна комбінація елементів цієї множини в рівності вище дорівнює нулю. Тоді всі коефіцієнти a_l дорівнюють нулю. Отже, всі коефіцієнти c_l дорівнюють нулю. Лему доведено. \square

Означення 4.3. Нехай $A(X)$ це множина звужень елементів множини $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ на простір X , тобто множина $A(X)$ складається з усіх функцій вигляду $f \circ \phi^{-1}$, де $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ та відображення ϕ визначимо рівністю (1.5).

Визначимо відображення $\nu : H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X}) \rightarrow A(X)$ рівністю

$$\nu(f) = f \circ \phi^{-1}. \quad (4.32)$$

З рівностей (4.32) та (1.5),

$$f(x + 0i) = \nu(f)(x) \quad (4.33)$$

для кожних $x \in X$ та $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. Тоді три наступні умови виконуються:

По-перше,

$$\nu(\alpha f) = \alpha \nu(f) \quad (4.34)$$

для кожних $\alpha \in \mathbb{R}$ та $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. По-друге,

$$\nu(f_1) + \nu(f_2) = \nu(f_1 + f_2) \quad (4.35)$$

для кожних $f_1, f_2 \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. По-третє,

$$\nu(f_1)\nu(f_2) = \nu(f_1 f_2) \quad (4.36)$$

для кожних $f_1, f_2 \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$.

Наслідок 4.3. *Відображення ν це ін'єкція.*

Доведення. Нехай $f_1, f_2 \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ такі, що $\nu(f_1) = \nu(f_2)$. Тоді, з рівностей (4.35) та (4.34) отримуємо рівність $\nu(f_1 - f_2) = 0$. Скориставшись лемою 4.6 для $U = \{0\}$ отримуємо тоді, що $f_1 - f_2 = 0$, тобто, $f_1 = f_2$. Наслідок доведено. \square

Лема 4.7. *Відображення ν є адитивною мультиплікативною та однорідною відносно дійсних чисел бієкцією між множинами $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ та $A(X)$.*

Доведення. Сюр'єктивність відображення ν випливає з означення 4.3. Ін'єктивність відображення ν доведена у наслідку 4.3. Рівності (4.35), (4.36) та (4.34) демонструють що відображення ν є адитивним, мультиплікативним та однорідним відносно дійсних чисел відповідно. Лему доведено. \square

Лема 4.8. *Множина $A(X)$ це дійсний лінійний простір.*

Доведення. За лемою 4.7, відображення ν це адитивна однорідна бієкція відносно дійсних чисел. За лемою 4.5, множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ замкнена відносно додавання та множення на дійсне число підмножина алгебри $H_{bQ}(\tilde{X})$. Тоді $A(X)$ — дійсний лінійний простір. \square

Для кожних $f \in A(X)$ та $n \in \mathbb{N}$ будемо визначати

$$\|f\|_{A(X);n} = \|\nu^{-1}(f)(x)\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n}. \quad (4.37)$$

де норма $\|\cdot\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n}$ визначена за допомогою рівності (4.3). Задамо метрику ρ_A на просторі $A(X)$ за допомогою наступної рівності:

$$\rho_A(f_1; f_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f_1 - f_2\|_{A(X);j}}{1 + \|f_1 - f_2\|_{A(X);j}} \quad (4.38)$$

для кожних $f_1, f_2 \in A(X)$.

Лема 4.9. *Відображення ν це ізометрія між метричними просторами $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ та $A(X)$, де множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ наділена звуженням метрики ρ заданої рівністю (4.4) та простір $A(X)$ наділений метрикою ρ_A , заданою рівністю (4.38).*

Доведення. Нехай $g_1, g_2 \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. З рівності (4.38), леми 4.7 і рівностей (4.37) та (4.4),

$$\begin{aligned} \rho_A(\nu(g_1); \nu(g_2)) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|\nu(g_1) - \nu(g_2)\|_{A(X);j}}{1 + \|\nu(g_1) - \nu(g_2)\|_{A(X);j}} = \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|\nu(g_1 - g_2)\|_{A(X);j}}{1 + \|\nu(g_1 - g_2)\|_{A(X);j}} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|\nu^{-1}(\nu(g_1 - g_2))\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n}}{1 + \|\nu^{-1}(\nu(g_1 - g_2))\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n}} = \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|g_1 - g_2\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n}}{1 + \|g_1 - g_2\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n}} = \rho(g_1; g_2). \end{aligned}$$

Отже,

$$\rho(g_1; g_2) = \rho_A(\nu(g_1), \nu(g_2)).$$

Таким чином, відображення ν це ізометрія. □

Наслідок 4.4. *Відображення ν та ν^{-1} є неперервними.*

Доведення. Відразу випливає з леми 4.9, оскільки, як відображення ν , так і відображення ν^{-1} є ізометріями. □

Теорема 4.3. Множина $A(X)$ наділена метрикою (4.38) та поточковими операціями додавання, множення на дійсний скаляр та множення це дійсна алгебра Фреше.

Доведення. У лемі 4.8 вже доведено, що $A(X)$ це дійсний лінійний простір.

Нехай $f_1, f_2 \in A(X)$. Покажемо, що $f_1 f_2 \in A(X)$. За означенням 4.3 та лемою 4.7, функції $\nu^{-1}(f_1), \nu^{-1}(f_2) \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. З рівності (4.36),

$$\nu(\nu^{-1}(f_1)\nu^{-1}(f_2)) = \nu(\nu^{-1}(f_1))\nu(\nu^{-1}(f_2)) = f_1 f_2.$$

Отже, $f_1 f_2 \in A(X)$.

Можна перевірити, що простір $A(X)$ це алгебра.

Покажемо, що алгебра $A(X)$ повна. Нехай $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ це послідовність Коші елементів алгебри $A(X)$. За лемою 4.9, послідовність $\{\nu^{-1}(f_j)\}_{j=1}^{\infty}$ це послідовність Коші. Таким чином, оскільки за лемою 4.5 множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$ замкнена, послідовність $\{\nu^{-1}(f_j)\}_{j=1}^{\infty}$ збігається до деякого елемента $g \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. З наслідка 4.4, послідовність $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ збігається до $\nu(g)$. Отже, $A(X)$ це повна алгебра.

Покажемо, що норма $\|\cdot\|_{A(X);n}$ мультиплікативно опукла. Нехай $f_1, f_2 \in A(X)$. Тоді ми доводимо, що

$$\|f_1 f_2\|_{A(x);n} \leq \|f_1\|_{A(x);n} \|f_2\|_{A(x);n}. \quad (4.39)$$

З рівності (4.37), леми 4.7, та рівності (4.3),

$$\begin{aligned} \|f_1 f_2\|_{A(x);n} &= \|\nu^{-1}(f_1 f_2)\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n} = \|\nu^{-1}(f_1)\nu^{-1}(f_2)\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n} = \\ &= \sup_{\|x\| \leq n} |\nu^{-1}(f_1)(x)\nu^{-1}(f_2)(x)| = \sup_{\|x\| \leq n} (|\nu^{-1}(f_1)(x)| |\nu^{-1}(f_2)(x)|) \leq \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq n} |\nu^{-1}(f_1)(x)| \sup_{\|x\| \leq n} |\nu^{-1}(f_2)(x)| = \\ &= \|\nu^{-1}(f_1)\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n} \|\nu^{-1}(f_2)\|_{H_{bQ}(\tilde{X});n} = \|f_1\|_{A(x);n} \|f_2\|_{A(x);n} \end{aligned}$$

для кожних $f_1, f_2 \in A(X)$. Отже, нерівність (4.39) доведена. Тоді $A(X)$ це алгебра Фреше. Теорему доведено. \square

Теорема 4.4. Кожний елемент $g \in A(X)$ може бути єдиним чином поданий у вигляді

$$g = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} Q_k^{l(k)}, \quad (4.40)$$

де всі c_l це дійсні числа.

Доведення. Нехай $g \in A(X)$. Тоді $\nu^{-1}(g) \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X})$. За теоремою 4.2,

$$\nu^{-1}(g) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} \widehat{Q}_k^{l(k)}$$

де, за лемою 4.6 для множини $U = \mathbb{R}$, c_l це набір дійсних чисел. Тоді, використовуючи лему 4.7, наслідок 4.4 та рівність (4.33),

$$\begin{aligned} g &= \nu(\nu^{-1}(g)) = \nu\left(\sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} \widehat{Q}_k^{l(k)}\right) \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} (\nu(\widehat{Q}_k))^{l(k)} = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} Q_k^{l(k)}. \end{aligned}$$

Тобто, елемент g може бути записаний у формі (4.40).

Покажемо, що у такій формі він записаний однозначно. Припустимо, що існує два різних набори $\{c_l^{(1)}\}$ та $\{c_l^{(2)}\}$ такі, що

$$g = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} c_l^{(i)} \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} Q_k^{l(k)},$$

де $i \in \{1; 2\}$. Тоді

$$0 = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} (c_l^{(1)} - c_l^{(2)}) \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} Q_k^{l(k)}.$$

Отже, функція

$$\sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l:\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N})=N}} (c_l^{(1)} - c_l^{(2)}) \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} \widehat{Q}_k^{l(k)}(x)$$

дорівнює нулю для кожного $x \in \tilde{X}$ такого, що $\text{Im } x = 0$. Тоді, за лемою 4.6 для $U = \{0\}$, всі коефіцієнти $c_l^{(1)} - c_l^{(2)}$ дорівнюють нулю. Тобто, $c_l^{(1)} = c_l^{(2)}$ для кожного l . Теорему доведено. \square

4.3. Спектр алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$, породженої симетричними поліномами

В цьому підрозділі буде застосовано конструкцію з попереднього підрозділу (див. означення 4.3) для побудови алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ — дійсного аналога алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, та буде описано спектр алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $p_1, \dots, p_n \in [1; +\infty)$. Нехай

$$X = L^{(\mathbb{R})}, \quad (4.41)$$

де простір $L^{(\mathbb{R})}$ визначений за означенням (1.14). Тоді, за лемою 3.3, комплексифікація простору X це простір

$$\tilde{X} = L, \quad (4.42)$$

де простір L визначений за означенням (1.13). Нехай

$$\check{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}_s(L; \mathbb{C}) \quad (4.43)$$

та

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_s(L^{(\mathbb{R})}; \mathbb{R}). \quad (4.44)$$

За лемою 3.7, алгебра $\check{\mathcal{P}}_0$ містить всі комплексні продовження елементів алгебри \mathcal{P}_0 , тобто, алгебри \mathcal{P}_0 та $\check{\mathcal{P}}_0$ задовольняють умові (4.1). Нехай

$$\aleph = \aleph_{p_1; \dots; p_n}, \quad (4.45)$$

де множина $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ задана рівністю (2.11). Нехай

$$Q = \left\{ R_\alpha^{(L(\mathbb{R}))} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n} \right\}, \quad (4.46)$$

де поліноми $R_\alpha^{(L(\mathbb{R}))}$ задані рівністю (2.12). Тоді, за лемою 3.7, множина комплексних продовжень елементів множини Q це

$$\widehat{Q} = \left\{ R_\alpha^{(L)} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n} \right\}. \quad (4.47)$$

За теоремою 2.10, множина \widehat{Q} це алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_s(L; \mathbb{C})$, тобто, умова (4.2) задовольняється. Отже, як умова (4.1), так і умова (4.2) задовольняються. Таким чином, з леми 4.3 випливає наступний наслідок:
Наслідок 4.5. *Множина $\left\{ R_\alpha^{(L(\mathbb{R}))} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n} \right\}$ це алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P}_s(L(\mathbb{R}); \mathbb{R})$.*

Відзначимо, що даний результат вже є відомим (див. теорему 3.3).

За означенням 4.1, $H_{bQ}(L)$ це підмножина алгебри $H_b(L)$, що складається з усіх таких $f \in H_b(L)$, що кожний член ряду Тейлора функції f це елемент алгебри $\mathcal{P}_s(L; \mathbb{C})$.

З леми 4.4 випливає, що $H_{bQ}(L)$ це алгебра.

Лема 4.10. *Алгебра $H_{bQ}(L)$ збігається з алгеброю $H_{bs}(L)$ тобто підалгеброю симетричних елементів алгебри $H_b(L)$.*

Доведення. З наслідку 4.1 випливає, що кожний член ряду Тейлора кожної функції f що належить алгебрі $H_b(L)$ це симетричний неперервний поліном тоді і тільки тоді, коли $f \in H_{bs}(L)$. Можна перевірити, що якщо кожний елемент ряду Тейлора функції f , що належить алгебрі $H_b(L)$ це симетричний неперервний поліном, то $f \in H_{bs}(L)$. Отже, $f \in H_{bQ}(L)$ тоді і тільки тоді, коли $f \in H_{bs}(L)$. Лему доведено. \square

Нехай

$$H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L) \quad (4.48)$$

буде визначатися за означенням 4.2, тобто, $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ це підмножина всіх таких $f \in H_{bs}(L)$, що $f(x) \in \mathbb{R}$ для кожного $x \in L$ такого, що $\text{Im } x = 0$.

Теорема 4.5. Кожна функція $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$, де множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ визначена за означенням (4.48), може бути однозначно подана наступним чином:

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}) = N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n} \\ l(k) > 0}} \left(R_k^{(L^{(\mathbb{R})})}(x) \right)^{l(k)}$$

для кожного $x \in L$, де всі c_l це дійсні числа, а відображення χ задане рівністю (4.5).

Доведення. Відразу випливає з теореми 4.2 та леми 4.6 для $\tilde{X} = L$ та $U = \mathbb{R}$. □

Нехай

$$A(L^{(\mathbb{R})}) \tag{4.49}$$

буде визначатися за означенням 4.3, тобто $A(L^{(\mathbb{R})})$ це множина звужень елементів множини $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ на простір $L^{(\mathbb{R})}$.

Означення 4.4. Нехай ν_0 це відображення ν задане рівністю (4.32) для $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\tilde{X}) = H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ та $A(X) = A(L^{(\mathbb{R})})$, тобто, $\nu_0 : H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L) \rightarrow A(L^{(\mathbb{R})})$ буде визначатися рівністю

$$\nu_0(f) = f \circ \phi^{-1}.$$

де відображення ϕ визначається рівністю (1.5), тобто,

$$\phi(z) = \operatorname{Re} z$$

для кожного $z \in L$ такого, що $\operatorname{Im} z = 0$.

Норма $\|\cdot\|_{H_{bs}(L);j}$ задана рівністю (4.3), тобто,

$$\|f\|_{H_{bs}(L);j} = \sup_{\|x\|_L \leq j} |f(x)| \tag{4.50}$$

для кожних $f \in H_{bs}(L)$ та $j \in \mathbb{N}$.

Норма $\|\cdot\|_{A(L^{(\mathbb{R})});j}$ задана рівністю (4.37), тобто,

$$\|f\|_{A(L^{(\mathbb{R})});j} = \|\nu_0^{-1}(f)\|_{H_{bs}(L);j} \tag{4.51}$$

для кожних $f \in A(L^{(\mathbb{R})})$ та $j \in \mathbb{N}$, де відображення ν_0 задане означенням 4.4.

Завдяки твердженню теореми 4.10, метрика $\rho^{(0)}$ на алгебрі $H_{bs}(L)$ може бути задана рівністю (4.4), тобто,

$$\rho^{(0)}(f_1; f_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f_1 - f_2\|_{H_{bs}(L);j}}{1 + \|f_1 - f_2\|_{H_{bs}(L);j}} \quad (4.52)$$

для кожних $f_1, f_2 \in H_{bs}(L)$.

Метрику $\rho_A^{(0)}$ на множині $A(L^{(\mathbb{R})})$ задамо рівністю (4.38), тобто,

$$\rho_A^{(0)}(f_1; f_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f_1 - f_2\|_{A(L^{(\mathbb{R})});j}}{1 + \|f_1 - f_2\|_{A(L^{(\mathbb{R})});j}} \quad (4.53)$$

для кожних $f_1, f_2 \in A(L^{(\mathbb{R})})$.

З леми 4.7, леми 4.9 та наслідку 4.4 випливає наступний наслідок:

Наслідок 4.6. Відображення ν_0 задане означенням 4.4 це адитивна, мультиплікативна, однорідна відносно дійсних чисел неперервна бієкція між множиною $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ та множиною $A(L^{(\mathbb{R})})$. Більш того, відображення ν_0 це ізометрія між множиною $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ та множиною $A(L^{(\mathbb{R})})$, де множина $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ наділена звуженням метрики $\rho^{(0)}$ визначеної рівністю (4.52), а множина $A(L^{(\mathbb{R})})$ наділена метрикою $\rho_A^{(0)}$ визначеною рівністю (4.53).

Теорема 4.6. Множина $A(L^{(\mathbb{R})})$ задана означенням (4.49), наділена метрикою (4.53) та поточковими операціями додавання, множення та множення на дійсні скаляри це дійсна алгебра Фреше.

Доведення. Відразу випливає з теореми 4.3 для $X = L^{(\mathbb{R})}$. □

Теорема 4.7. Кожна функція $f \in A(L^{(\mathbb{R})})$, де алгебра $A(L^{(\mathbb{R})})$ задана означенням (4.49), може бути однозначно подана у вигляді

$$f = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}) = N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n} \\ l(k) > 0}} \left(R_k^{(L^{(\mathbb{R})})} \right)^{l(k)},$$

де всі c_l це дійсні числа, а відображення χ задається рівністю (4.5).

Доведення. Відразу випливає з теореми 4.4 для $X = L^{(\mathbb{R})}$, $\aleph = \aleph_{p_1; \dots; p_n}$ та $Q = \left\{ R_\alpha^{(L^{(\mathbb{R})})} : \alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n} \right\}$, де кожний поліном $R_\alpha^{(L^{(\mathbb{R})})}$ заданий рівністю (2.12). \square

Опишемо спектр $\mathcal{M}(A(L^{(\mathbb{R})}))$. Нехай $X_{\aleph_{p_1; \dots; p_n}}$ це множина всіх таких елементів x простору L , що $R_\alpha^{(L)}(x) \in \mathbb{R}$ для кожного $\alpha \in \aleph_{p_1; \dots; p_n}$, де поліном $R_\alpha^{(L)}$ визначений рівністю (2.12).

Множина $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ вже впорядкована у (2.35). Нехай

$$\alpha_1; \dots; \alpha_{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|} \quad (4.54)$$

це елементи множини $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ записані згідно з цим впорядкуванням. Визначимо відображення $\tau : \mathcal{M}(A(L^{(\mathbb{R})})) \rightarrow \mathbb{R}^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}$ рівністю

$$\tau(\eta) = \left(\eta\left(R_{\alpha_1}^{(L^{(\mathbb{R})})}\right); \eta\left(R_{\alpha_2}^{(L^{(\mathbb{R})})}\right); \dots; \eta\left(R_{\alpha_{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}}^{(L^{(\mathbb{R})})}\right) \right). \quad (4.55)$$

Лема 4.11. Відображення τ , задане рівністю (4.55), ін'єктивне.

Доведення. Нехай $\eta \in \mathcal{M}(A(L^{(\mathbb{R})}))$ та $f \in A(L^{(\mathbb{R})})$. За теоремою 4.7,

$$f = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \aleph_{p_1; \dots; p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \aleph_{p_1; \dots; p_n})=N}} c_l \prod_{\substack{k \in \aleph_{p_1; \dots; p_n} \\ l(k) > 0}} \left(R_k^{(L^{(\mathbb{R})})} \right)^{l(k)},$$

де всі $c_l \in \mathbb{R}$. Оскільки функціонал η є неперервним лінійним і мультиплікативним, з цього випливає рівність

$$\eta(f) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \aleph_{p_1; \dots; p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \aleph_{p_1; \dots; p_n})=N}} c_l \prod_{\substack{k \in \aleph_{p_1; \dots; p_n} \\ l(k) > 0}} \left(\eta\left(R_k^{(L^{(\mathbb{R})})}\right) \right)^{l(k)}.$$

Отже, кожний функціонал η однозначно заданий набором його значень на базисних поліномах R_{α_j} , тобто, вектором $\tau(\eta)$, заданим рівністю (4.55). Таким чином, якщо $\tau(\eta_1) = \tau(\eta_2)$, тобто, $\eta_1\left(R_{\alpha_j}^{(L^{(\mathbb{R})})}\right) = \eta_2\left(R_{\alpha_j}^{(L^{(\mathbb{R})})}\right)$ для кожного $j \in \{1; \dots; |\aleph_{p_1; \dots; p_n}|\}$, то виконується рівність $\eta_1 = \eta_2$, де $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{M}(A(L^{(\mathbb{R})}))$. Лему доведено. \square

Для $x \in X_{\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}}$ визначимо відображення $\tilde{\delta}_x : A(L^{\mathbb{R}}) \rightarrow \mathbb{R}$ рівністю

$$\tilde{\delta}_x(f) = \nu_0^{-1}(f)(x) \quad (4.56)$$

для кожного $f \in A(L^{\mathbb{R}})$, де відображення ν_0 задане означенням 4.4.

Лема 4.12. Для кожного $x \in X_{\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}}$ функціонал $\tilde{\delta}_x$, заданий рівністю (4.56), є елементом спектра $\mathcal{M}(A(L^{\mathbb{R}}))$.

Доведення. З наслідку 4.6, відображення ν_0 — адитивна, мультиплікативна, однорідна відносно множення на дійсні числа, неперервна ізометрична бієкція. Тоді відображення ν_0^{-1} це ізометрична бієкція, отже, відображення ν_0^{-1} неперервне. Покажемо, що відображення ν_0^{-1} лінійне. Оскільки відображення ν_0^{-1} це бієкція, та відображення ν_0 адитивне та однорідне відносно множення на дійсні числа, то рівності

$$\begin{aligned} a\nu_0^{-1}(f_1) + b\nu_0^{-1}(f_2) &= \nu_0^{-1}(\nu_0(a\nu_0^{-1}(f_1) + b\nu_0^{-1}(f_2))) = \\ &= \nu_0^{-1}(a\nu_0(\nu_0^{-1}(f_1)) + b\nu_0(\nu_0^{-1}(f_2))) = \nu_0^{-1}(af_1 + bf_2) \end{aligned}$$

виконуються для кожних $a, b \in \mathbb{R}$ та $f_1, f_2 \in A(L^{\mathbb{R}})$.

Покажемо, що відображення ν_0^{-1} мультиплікативне. Оскільки відображення ν_0^{-1} це бієкція та відображення ν_0 мультиплікативне, рівність

$$\begin{aligned} \nu_0^{-1}(f_1)\nu_0^{-1}(f_2) &= \nu_0^{-1}(\nu_0(\nu_0^{-1}(f_1)\nu_0^{-1}(f_2))) \\ &= \nu_0^{-1}(\nu_0(\nu_0^{-1}(f_1))\nu_0(\nu_0^{-1}(f_2))) = \nu_0^{-1}(f_1f_2) \end{aligned}$$

виконується для кожних $f_1, f_2 \in A(L^{\mathbb{R}})$.

Таким чином, відображення ν_0^{-1} лінійне, мультиплікативне та неперервне. Тоді рівності

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_x(af_1 + bf_2) &= \nu_0^{-1}(af_1 + bf_2)(x) = \\ &= a\nu_0^{-1}(f_1)(x) + b\nu_0^{-1}(f_2)(x) = a\tilde{\delta}_x(f_1) + b\tilde{\delta}_x(f_2) \end{aligned}$$

та

$$\tilde{\delta}_x(f_1f_2) = \nu_0^{-1}(f_1f_2)(x) = \nu_0^{-1}(f_1)(x)\nu_0^{-1}(f_2)(x) = \tilde{\delta}_x(f_1)\tilde{\delta}_x(f_2)$$

виконуються для кожних $f_1, f_2 \in A(L^{\mathbb{R}})$ та $a, b \in \mathbb{R}$. Отже, функціонал $\tilde{\delta}_x$ є лінійним та мультиплікативним.

Покажемо, що функціонал $\tilde{\delta}_x$ неперервний. Оскільки функціонал $\tilde{\delta}_x$ лінійний, з рівності (4.51) випливає, що

$$\begin{aligned} |\tilde{\delta}_x(f_1) - \tilde{\delta}_x(f_2)| &= |\tilde{\delta}_x(f_1 - f_2)| = |\nu_0^{-1}(f_1 - f_2)(x)| \leq \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{A(L^{\mathbb{R}}), \lfloor \|x\| \rfloor + 1}. \end{aligned} \quad (4.57)$$

З рівності (4.53) випливає нерівність

$$\frac{1}{2^{\lfloor \|x\| \rfloor + 1}} \frac{\|f_1 - f_2\|_{A(L^{\mathbb{R}}), \lfloor \|x\| \rfloor + 1}}{1 + \|f_1 - f_2\|_{A(L^{\mathbb{R}}), \lfloor \|x\| \rfloor + 1}} \leq \rho_A^{(0)}(f_1; f_2).$$

Отже,

$$\|f_1 - f_2\|_{A(L^{\mathbb{R}}), \lfloor \|x\| \rfloor + 1} \leq \frac{2^{\lfloor \|x\| \rfloor + 1} \rho_A^{(0)}(f_1; f_2)}{1 - 2^{\lfloor \|x\| \rfloor + 1} \rho_A^{(0)}(f_1; f_2)} \quad (4.58)$$

Якщо відстань $\rho_A^{(0)}(f_1; f_2) < \frac{1}{2^{\lfloor \|x\| \rfloor + 2}}$, отримуємо нерівність

$$\frac{2^{\lfloor \|x\| \rfloor + 1} \rho_A^{(0)}(f_1; f_2)}{1 - 2^{\lfloor \|x\| \rfloor + 1} \rho_A^{(0)}(f_1; f_2)} < 2^{\lfloor \|x\| \rfloor + 2} \rho_A^{(0)}(f_1; f_2). \quad (4.59)$$

З нерівностей (4.57), (4.58) та (4.59), випливає, що $\tilde{\delta}_x$ є неперервним.

Тоді функціонал $\tilde{\delta}_x$, де $x \in X_{\aleph_{p_1}; \dots; p_n}$, це мультиплікативний лінійний дійснозначний неперервний функціонал на алгебрі $A(L^{\mathbb{R}})$. Отже, $\tilde{\delta}_x \in \mathcal{M}(A(L^{\mathbb{R}}))$. Лему доведено. \square

Відзначимо, що

$$\tau(\tilde{\delta}_x) = (R_{\alpha_1}(x); \dots; R_{\alpha_{|\aleph_{p_1}; \dots; p_n|}}(x)) \quad (4.60)$$

для кожного $x \in X_{\aleph_{p_1}; \dots; p_n}$.

Лема 4.13. Для кожного $b \in \mathbb{R}^{|\aleph_{p_1}; \dots; p_n|}$ існує такий $x \in X_{\aleph_{p_1}; \dots; p_n}$, що $\tau(\tilde{\delta}_x) = b$, де відображення τ визначене рівністю (4.55).

Доведення. Нехай $b = (b_1; \dots; b_{|\aleph_{p_1}; \dots; p_n|}) \in \mathbb{R}^{|\aleph_{p_1}; \dots; p_n|}$. За лемою 1.3, існує деякий елемент $x \in L_\infty^n \subset L$ такий, що $R_{\alpha_j}(x) = b_j$ для кожного $j \in$

$\{1; \dots; |\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}|\}$. Оскільки $b_j \in \mathbb{R}$, це означає, що $R_{\alpha_j}(x) \in \mathbb{R}$ для кожного $j \in \{1; \dots; |\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}|\}$. Тоді $x \in X_{\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}}$. З рівності (4.60) отримуємо рівність

$$\tau(\widetilde{\delta}_x) = (R_{\alpha_1}(x); \dots; R_{\alpha_{|\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}|}}(x)) = b.$$

Лему доведено. □

Наслідок 4.7. Відображення τ , задане рівністю (4.55), сюр'єктивне.

Доведення. За лемою 4.13, для кожного елемента b простору $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}|}$, існує такий елемент $x \in X_{\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}}$, що $\tau(\widetilde{\delta}_x) = b$. Отже, відображення τ сюр'єктивне. □

Теорема 4.8. Відображення τ , задане рівністю (4.55), є бієкцією.

Доведення. За лемою 4.11, відображення τ є ін'єктивним. З наслідку 4.7, відображення τ є сюр'єктивним. Таким чином, τ — це бієкція. □

Теорема 4.9. Спектр алгебри Фреше $A(L^{(\mathbb{R})})$ збігається з множиною всіх функціоналів $\{\widetilde{\delta}_x : x \in X_{\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}}\}$, заданих рівністю (4.56).

Доведення. Вже доведено, що кожний такий функціонал є елементом спектру (див. лему 4.12). Покажемо, що кожний елемент спектру є таким функціоналом для деякого елемента множини $X_{\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}}$. Нехай $\eta \in \mathcal{M}(A(L^{(\mathbb{R})}))$. Покажемо, що існує такий $x \in X_{\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}}$, що $\eta = \widetilde{\delta}_x$. За лемою 4.13, існує такий $x_\eta \in X_{\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}}$, що

$$\tau(\widetilde{\delta}_{x_\eta}) = \left(\eta(R_{\alpha_1}); \dots; \eta(R_{\alpha_{|\mathbb{N}_{p_1; \dots; p_n}|}}) \right).$$

Таким чином, $\tau(\eta) = \tau(\widetilde{\delta}_{x_\eta})$. Тоді, за лемою 4.11,

$$\widetilde{\delta}_{x_\eta} = \eta.$$

Тобто, η це функціонал вигляду (4.56) для елемента x_η . Теорему доведено. □

4.4. Ізоморфізм між алгеброю $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ та алгеброю $A\left(\mathbb{R}^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}\right)$

Метою цього підрозділу є встановлення ізоморфізму між алгеброю $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ з попереднього підрозділу та алгеброю $A\left(\mathbb{R}^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}\right)$ визначеними за означенням 4.3.

Розглянемо множину $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ визначену за означенням (2.11). Відзначимо, що елементи множини $\aleph_{p_1; \dots; p_n}$ вже впорядковані за допомогою впорядкування (2.35).

Нехай

$$X = \mathbb{R}^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}, \quad (4.61)$$

тоді

$$\tilde{X} = \mathbb{C}^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}.$$

Нехай

$$\check{\mathcal{P}}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{C}^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}; \mathbb{C})$$

та

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}; \mathbb{R}).$$

Відзначимо, що така алгебра $\check{\mathcal{P}}_0$ містить комплексні продовження кожного елемента алгебри \mathcal{P}_0 , тобто, алгебри \mathcal{P}_0 та $\check{\mathcal{P}}_0$ задовольняють умові (4.1).

Нехай

$$\aleph = \{(1; 0; \dots; 0); (0; 1; \dots; 0); \dots; (0; 0; \dots; 1)\} \subset \mathbb{Z}_+^{|\aleph_{p_1; \dots; p_n}|}. \quad (4.62)$$

Нехай

$$\hat{Q} = \{h_{\alpha_j} : j \in \{1; \dots; |\aleph_{p_1; \dots; p_n}|\}\}, \quad (4.63)$$

де

$$h_{\alpha_j} = \xi\left(R_{\alpha_j}\right), \quad (4.64)$$

де відображення $\xi : H_{bs}(L) \rightarrow H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ визначене теоремою 4.1. За теоремою 4.1, h_{α_j} це координатні функціонали. Нехай

$$Q = \left\{ h_{\alpha_j} \Big|_{\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}} : j \in \{1; \dots; |\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|\} \right\}. \quad (4.65)$$

Відзначимо, що множина \widehat{Q} є алгебраїчним базисом алгебри $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; \mathbb{C})$, тому, враховуючи, що елементи множини \widehat{Q} це комплексні продовження елементів множини Q , умова (4.2) виконується. Тобто, обидві умови (4.1) та (4.2) виконуються. Таким чином, за лемою 4.3, множина Q це алгебраїчний базис алгебри $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; \mathbb{R})$. Відзначимо, що це загальновідомий результат.

За означенням 4.1, множина $H_{bQ}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ це підмножина множини $H_b(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, що складається з усіх таких $f \in H_b(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, що кожний член ряду Тейлора функції f це елемент алгебри $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; \mathbb{C})$. Відзначимо, що алгебра $H_{bQ}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ збігається з алгеброю $H_b(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, оскільки кожний член ряду Тейлора аналітичної функції є поліномом. Тоді, згадуючи рівність (1.9),

$$H_{bQ}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}) = H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}).$$

Визначимо множину $H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ за допомогою означення 4.2, тобто, це підмножина всіх таких $f \in H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, що

$$f(x) \in \mathbb{R} \text{ для кожного } x \in \mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|} \text{ такого, що } \text{Im } x = 0.$$

Визначимо множину

$$A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}) \quad (4.66)$$

за допомогою означення 4.3, тобто, $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ це множина звужень елементів множини $H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ на простір $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$.

Означення 4.5. Нехай ν_1 це відображення ν , задане рівністю (4.32), для $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(\widetilde{X}) = H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ та $A(X) = A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, тобто, $\nu_1 :$

$H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}) \rightarrow A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ задане рівністю

$$\nu_1(f) = f \circ \phi^{-1}, \quad (4.67)$$

де відображення ϕ задане рівністю (1.5), тобто, $\phi(z) = \operatorname{Re} z$ для кожного $z \in \{u \in \mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|} : \operatorname{Im} u = 0\}$.

Норма $\|\cdot\|_{H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)}$ задана рівністю (4.3), тобто

$$\|f\|_{H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)} = \sup_{\|x\| \leq j} |f(x)| \quad (4.68)$$

для кожних $f \in H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ та $j \in \mathbb{N}$.

Норма $\|\cdot\|_{A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)}$ задана рівністю (4.37), тобто,

$$\|f\|_{A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)} = \|\nu_1^{-1}(f)\|_{H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)} \quad (4.69)$$

для кожних $f \in A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ та $j \in \mathbb{N}$, де відображення ν_1 задане означенням 4.5.

Задамо метрику $\rho^{(1)}$ на множині $H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ за допомогою рівності (4.4), тобто,

$$\rho^{(1)}(f_1; f_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f_1 - f_2\|_{H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)}}{1 + \|f_1 - f_2\|_{H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)}} \quad (4.70)$$

для кожних $f_1, f_2 \in H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$.

Задамо метрику $\rho_A^{(1)}$ на множині $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ за допомогою рівності (4.38), тобто,

$$\rho_A^{(1)}(f_1; f_2) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f_1 - f_2\|_{A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)}}{1 + \|f_1 - f_2\|_{A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}; j)}} \quad (4.71)$$

для кожних $f_1, f_2 \in A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$.

З леми 4.7, леми 4.9 та наслідку 4.4 випливає наступне твердження:

Наслідок 4.8. Відображення ν_1 , задане означенням 4.5, є адитивною мультиплікативною однорідною відносно множення на дійсні числа неперервною бієкцією між множинами $H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ та $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$. Більш

того, відображення ν_1 це ізометрія між множинами $H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ та $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, де множина $H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ наділена звуженням метрики $\rho^{(1)}$ заданої рівністю (4.70), а множина $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ наділена метрикою $\rho_A^{(1)}$ заданою рівністю (4.71).

Теорема 4.10. Множина $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, задана означенням (4.66), наділена метрикою (4.53) та поточковими операціями додавання, множення, та множення на дійсний скаляр є дійсною алгеброю Фреше.

Доведення. Відразу випливає з теореми 4.3 для $X = \mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$. \square

Теорема 4.11. Кожний елемент $f \in A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$, де алгебра $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ задана означенням (4.66), може бути однозначно поданий у вигляді

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l_1: \{1; \dots; |\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|\} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l_1, \{1; \dots; |\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|\}) = N}} c_l x_1^{l_1(1)} x_2^{l_1(2)} \dots x_{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}^{l_1(|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|)} \quad (4.72)$$

для кожного $x = (x_1; x_2; \dots; x_{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}) \in \mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$, де всі c_l є дійсними числами.

Доведення. Підставимо простір X , заданий рівністю (4.61), множину \mathbb{N} , задану рівністю (4.62), та множину \mathcal{Q} , задану рівністю (4.65), у теорему 4.4.

Маємо однозначний розклад

$$f(x) = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}) = N}} c_l \prod_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l(k) > 0}} h_k^{l(k)}(x) \quad (4.73)$$

для кожного $x \in \mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$, де всі c_l дійсні числа.

Задамо відображення $l_1 : \{1; \dots; |\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ наступною рівністю:

$$l_1(m) = l(\underbrace{(0; \dots; 0)}_{m-1}; 1; 0; \dots; 0)$$

для кожних $m \in \{1; \dots; |\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|\}$ та $l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Нехай $c_{l_1} = c_l$. Тоді, оскільки h_k це координатні функціонали, рівність (4.73) рівносильна рівності (4.72). Теорему доведено. \square

Теорема 4.12. Алгебра Фреше $A(L^{(\mathbb{R})})$ ізоморфна алгебрі Фреше $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$.

Доведення. Нехай $\xi : H_{bs}(L) \rightarrow H(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ це неперервний ізоморфізм, заданий теоремою 4.1. Нехай відображення ν_1 задане означенням 4.5, а відображення ν_0 задане означенням 4.4. Покажемо, що відображення $\zeta = \nu_1 \circ \xi \circ \nu_0^{-1}$ це ізоморфізм між алгебрами $A(L^{(\mathbb{R})})$ та $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$. По-перше, покажемо що відображення ζ коректно визначене. Достатньо довести, що звуження ізоморфізму ξ на множину $H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$ набуває значень з множини $H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$. Нехай $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$. За теоремою 4.5,

$$f = \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n})=N}} c_l \prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n} \\ l(\alpha) > 0}} (R_\alpha^{(L)})^{l(\alpha)}$$

де $c_l \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\begin{aligned} \xi(f) &= \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n})=N}} c_l \prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n} \\ l(\alpha) > 0}} (\xi(R_\alpha^{(L)}))^{l(\alpha)} = \\ &= \sum_{N=0}^{+\infty} \sum_{\substack{l: \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \\ \chi(l, \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n})=N}} c_l \prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n} \\ l(\alpha) > 0}} h_\alpha^{l(\alpha)}, \end{aligned}$$

де коефіцієнти c_l є дійсними числами та кожний координатний функціонал h_α заданий рівністю (4.64). Звуження всіх координатних функціоналів h_α на простір $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$ є дійснозначними. Тоді звуження функції $\xi(f)$ на простір $\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}$ дійснозначне. Таким чином, $\xi(f) \in H^{(\mathbb{R})}(\mathbb{C}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$ для кожного $f \in H_{bQ}^{(\mathbb{R})}(L)$. Отже, відображення ζ коректно визначене. З наслідку 4.6, теореми 4.1 та 4.8, відображення ν_0^{-1} , ξ та ν^1 відповідно це ізоморфізми. Отже, ζ це ізоморфізм. Тобто, побудовано ізоморфізм між алгебрами $A(L^{(\mathbb{R})})$ та $A(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|})$. Теорему доведено. \square

В підрозділі 4.1 досліджено алгебру цілих симетричних неперервних комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку

$L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, знайдено її спектр та доведено ізоморфність між цією алгеброю та алгеброю цілих функцій на деякому декартовому степеню простору \mathbb{C} .

В підрозділі 4.2 на дійному банаховому просторі X було побудовано деякий дійсний аналог $A(X)$ алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексифікації простору X , породженої деякою скінченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів. Досліджено структуру елементів алгебри $A(X)$.

В підрозділі 4.3 застосовано конструкцію з підрозділу 4.2 для побудови алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ — дійсного аналога алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом та було описано спектр алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$.

Нарешті, в підрозділі 4.4 встановлено ізоморфізм між алгеброю $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ з попереднього підрозділу та алгеброю $A\left(\mathbb{R}^{|\mathbb{N}_{p_1, \dots, p_n}|}\right)$.

Результати четвертого розділу опубліковані в статті [73]. Вони також доповідалися на науковій конференції [74] та наукових семінарах.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано ряд актуальних задач функціонального аналізу, що стосуються алгебр симетричних неперервних поліномів та симетричних цілих функцій обмеженого типу на декартових добутках банахових просторів. У роботі отримано такі наукові результати:

1. Побудовано множини елементарних симетричних поліномів на декартових добутках $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ та $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ комплексних та дійсних, відповідно, банахових просторів функцій, абсолютно інтегрованих у відповідних степенях за Лебегом, і досліджено їхні властивості;
2. Показано, що множина елементарних симетричних поліномів є алгебраїчним базисом алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегрованих у відповідних степенях за Лебегом, у випадку $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n \geq 1$;
3. Показано, що множина елементарних симетричних поліномів є алгебраїчним базисом алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку $L_{p_1} \times L_{p_2} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегрованих у відповідних степенях за Лебегом, для $p_1, p_2, \dots, p_n \geq 1$;
4. Побудовано алгебраїчний базис підалгебри алгебри дійснозначних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі E , для якої існує деяка підалгебра алгебри комплекснозначних неперервних поліномів на просторі \tilde{E} — комплексифікації простору E , яка має алгебраїчний базис та містить комплексні продовження всіх елементів початкової підалгебри;
5. Показано, що множина елементарних симетричних поліномів є алгебраїчним базисом алгебри неперервних симетричних дійснозначних

поліномів на декартовому добутку $L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}$ дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом;

6. Досліджено алгебру цілих симетричних комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, знайдено її спектр та доведено ізоморфність між цією алгеброю та алгеброю цілих функцій на деякому декартовому степеню простору \mathbb{C} ;
7. На дійсному банаховому просторі X побудовано алгебру $A(X)$ — аналог алгебри цілих функцій обмеженого типу на комплексифікації простору X , породженої деякою скінченною множиною алгебраїчно незалежних однорідних поліномів та досліджено структуру елементів алгебри $A(X)$;
8. Побудовано алгебру $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ — дійсний аналог алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на декартовому добутку $L_{p_1} \times \dots \times L_{p_n}$ комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом, та описано спектр алгебри $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$;
9. Встановлено ізоморфізм між алгеброю $A\left(L_{p_1}^{(\mathbb{R})} \times \dots \times L_{p_n}^{(\mathbb{R})}\right)$ та алгеброю $A(X)$, де X це деякий декартів степінь простору \mathbb{R} .

Отримані результати мають фундаментальний теоретичний характер, можуть бути корисними у функціональному аналізі та в статистичній квантовій фізиці для побудови інтегральних статистичних сум для ідеальних газів, що складаються із бозонів або ферміонів.

Достовірність результатів дисертації підтверджується тим, що їх опубліковано у фахових журналах і вони були апробовані на спеціалізованих наукових семінарах і міжнародних наукових конференціях, а також повністю опубліковані у трьох статтях у виданнях, що індексуються в базах

даних Scopus та/або Web of Science Core Collection та в одній статті у фаховому журналі категорії Б.

Результати дослідження можуть бути використані науковцями та дослідницькими групами провідних наукових установ України та світу, зокрема: Карпатського національного університету імені Василя Стефаника, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Інституту математики НАН України, а також інших університетів та наукових центрів. Частина результатів, представлених у дисертації, знаходить своє застосування в працях інших дослідників, що підтверджується посиланнями на статті в їхніх роботах, зокрема, В. Бігуна, М. Варварюка, Д. Долішняк, А. Загороднюка, В. Кравців.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Vasylyshyn T. Isomorphisms of algebras of symmetric functions on spaces ℓ_p // *Matematychni Studii*. V.63, No.1 2025, 77-87.
2. Alencar R., Aron R., Galindo P., Zagorodnyuk A. Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // *Bull. Lond. Math. Soc.* 2003, **35** (2), 55–64.
3. Aron R., Galindo P., Pinasco D., Zalduendo I. Group-symmetric holomorphic functions on a Banach space// *Bull. Lond. Math. Soc.* 2016, **48** (5), 779–796.
4. Bandura A., Kravtsiv V., Vasylyshyn T. Algebraic basis of the algebra of all symmetric continuous polynomials on the Cartesian product of ℓ_p -spaces// *Axioms*. 2022, **11** (2), art. no. 41.
5. Burtnyak I.V., Chopyyuk Yu.Yu., Vasylyshyn S.I., Vasylyshyn T.V. Algebras of weakly symmetric functions on spaces of Lebesgue measurable functions// *Carpathian Math. Publ.* 2023, **15** (2), 411–419.
6. Vasylyshyn S.I., Spectra of algebras of analytic functions, generated by sequences of polynomials on Banach spaces, and operations on spectra// *Carpathian Math. Publ.* **15** (2023), №1, 104–119.
7. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra// *Proc. Edinb. Math. Soc.* 2012, **55** (1), 125–142.
8. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. The convolution operation on the spectra of algebras of symmetric analytic functions// *J. Math. Anal. Appl.* 2012, **395** (2), 569–577.
9. Aron R.M., Cole B.J., Gamelin T.W., Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space// *J. Reine Angew. Math.* 1991; 415: pp. 51–93.

10. Aron R.M., Galindo P., Garcia D., Maestre M., Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions// *Trans. Am. Math. Soc.* 1996; 348: pp. 543–559.
11. García D., Lourenço M.L., Maestre M., Moraes L.A., The spectrum of analytic mappings of bounded type// *J. Math. Anal. Appl.* 2000; 245: pp. 447–470.
12. Carando D., Dimant V., Rodríguez J.T., Homomorphisms on algebras of analytic functions on non-symmetrically regular spaces. *Math. Z.* 2023// 304: article number 17.
13. Chernega I., Galindo P., Zagorodnyuk A. On the spectrum of the algebra of bounded-type symmetric analytic functions on ℓ_1 //*Math. Nachr.* 2024, **297**, 3835–3846.
14. Chernega I., Holubchak O., Novosad Z., Zagorodnyuk A. Continuity and hypercyclicity of composition operators on algebras of symmetric analytic functions on Banach spaces // *Eur. J. Math.* 2020, **6** (1), 153–163.
15. Chernega I., Martsinkiv M., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Applications of Supersymmetric Polynomials in Statistical Quantum Physics// *Quantum Reports* 2023, **5** (4), 683–697.
16. Chopyyuk Yu., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Rings of multisets and integer multinumbers// *Mathematics.* 2022, **10** (5), art. no. 778.
17. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 2017, **147** (4), 743–761. doi:10.1017/S0308210516000287
18. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Symmetric and finitely symmetric polynomials on the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0, +\infty)$ // *Math. Nachr.* 2018, **291** (11–12), 1712–1726.
19. Galindo P., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Analytic structure on the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions on L_∞ // *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.* 2020, **114**, Article number 56.

20. González M., Gonzalo R., Jaramillo J. A. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // *J. Lond. Math. Soc.* 1999, **59** (2), 681–697.
21. Halushchak S. I. Isomorphisms of some algebras of analytic functions of bounded type on Banach spaces // *Mat. Stud.* 2021, **56** (1), 107–112.
22. Novosad Z., Vasylyshyn S., Zagorodnyuk A. Countably generated algebras of analytic functions on Banach spaces // *Axioms* 2023, **12** (8), Article number 798.
23. Kravtsiv V. Block-supersymmetric polynomials on spaces of absolutely convergent series // *Symmetry* 2024, **16** (2), Article number 179.
24. Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. On algebraic basis of the algebra of symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^n)$ // *J. Funct. Spaces* 2017, **2017**, Article ID 4947925, 8 p.
25. Kravtsiv V.V., Zagorodnyuk A.V. Spectra of algebras of block-symmetric analytic functions of bounded type // *Mat. Stud.* 2022, **58** (1), 69–81.
26. Martin R. S., Contributions to the theory of functionals. Ph. D. Thesis // University of California, 1932.
27. Aron R.M.; Falcó J.; Maestre M., Separation theorems for group invariant polynomials // *J. Geom. Anal.* **2018**, *28*, 393–404.
28. Aron R.M.; Falcó J.; García D.; Maestre M., Algebras of symmetric holomorphic functions of several complex variables // *Rev. Mat. Complut.* **2018**, *31*, 651–672.
29. Falcó J.; García D.; Jung M.; Maestre M., Group-invariant separating polynomials on a Banach space // *Publ. Mat.* **2022**, *66*, 207–233.
30. Zorn M.A., Gateaux differentiability and essential boundness // *Duke Math J.* —1945— Vol.12— P.579–583.
31. Zorn M.A., Characterization of analytic function in Banach spaces // *Ann. of Math* —1945— Vol.46— P.585–593.

32. Zorn M.A., Derivatives and Feshet differentials//Bull. Amer. —1946—
Vol.52— P.133-137.
33. Sebastiao e Silva J., As funcoes analyticas e analise functional//
Portugal Math. —1950—Vol. 9 — P.1-130.
34. Sebastiao e Silva J., Sui fundamenti della teoria dei funzionali analitici// Portugal Math. —1953—Vol. 12 — P.1-46.
35. Carne T.K., Cole B., Gamelin T.W., A uniform algebra of analytic functions on a Banach space// Trans.Amer.Math.Soc.—1989—Vol.314—P.639-659
36. Cole B., Gamelin T.W., Representing measures and Hardy spaces for the infinite polydisk algebra//Prov. London Math.Soc.—1986—Vol. 53 — P112-142
37. Chernega I., Galinda P., Zagorodnyuk A. A multiplicative convolution on the spectra of algebras of symmetric analytic functions//Springer-Verlag Italia s.r.l. —2014—Vol.27—P.575-585.
38. Nemirovskii A. S., Semenov S. M. On polynomial approximation of functions on Hilbert space. // Mat. USSR Sbornik 1973, **21** (2), 255-277.
39. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces // North Holland, 1986.
40. Martin R. S. Contribution to the theory of functionals// Ph.D. thesis, University of California, 1932
41. Vasylyshyn T. Algebras of entire symmetric functions on spaces of Lebesgue measurable essentially bounded functions // J. Math. Sci. (N.Y.) 2020, **246** (2), 264–276.
42. Aron R.M., Berner P.D., A Hann-Banach extension theorem for the analytical mappings// Bull. Soc. Math. France—1978.—Vol. 106—P.3-24.
43. Aron R.M., Boyd C., Choi Y.S., Unique Hann-Banach Theorem for spaces of homogeneous polynomials//J. Austral. Math. Soc. —2001—Vol.70—P.387-400.

44. Moraes L.A. Extensions of holomorphic mapping from E to E'' //Proc. Amer. Math. Soc. —1993—Vol. 118 —P. 455-461.
45. Zalduendo I. A canonical extension for analytic functions on Banach spaces//Trans.Amer.Math.Soc. — 1990 — Vol. 320 — P.747-763.
46. Vasylyshyn T. Symmetric polynomials on $(L_p)^n$ // Eur. J. Math. 2020, **6** (1), 164–178.
47. Vasylyshyn T. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of L_p on the semi-axis// Mat. Stud. 2018, **50** (1), 93–104.
48. Vasylyshyn T. V. The algebra of symmetric polynomials on $(L_\infty)^n$ // Mat. Stud. 2019, **52** (1), 71–85.
49. Vasylyshyn T. V. Isomorphisms of algebras of symmetric functions on spaces ℓ_p .//Mat. Stud. 2025, **63** (1), 77–87.
50. Vasylyshyn T. Algebras of symmetric analytic functions on Cartesian powers of Lebesgue integrable in a power $p \in [1, +\infty)$ functions// Carpathian Math. Publ. 2021, **13** (2), 340–351.
51. Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. The space of continuous linear functionals on ℓ_1 approximated by weakly symmetric continuous linear functionals// Symmetry 2025, **17** (2), Article number 206.
52. Vasylyshyn T. Symmetric analytic functions on the Cartesian power of the complex Banach space of Lebesgue measurable essentially bounded functions on $[0, 1]$ // J. Math. Anal. Appl. 2022, **509** (2), Article number 125977.
53. Vasylyshyn T. V., Strutinskii M. M. Algebras of symmetric $*$ -polynomials in the space \mathbb{C}^2 // J. Math. Sci. (N.Y.) 2021, **253** (1), 40–53.
54. Vasylyshyn T. V., Zagorodnyuk A. V. Symmetric polynomials on the Cartesian power of the real Banach space $L_\infty[0, 1]$ // Mat. Stud. 2020, **53** (2), 192–205.
55. Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Continuous symmetric 3-homogeneous polynomials on spaces of Lebesgue measurable essentially bounded functions// Methods Funct. Anal. Topology. 2018, **24** (4), 381–398.

56. Vasylyshyn T., Zahorodniuk V. Weakly symmetric functions on spaces of Lebesgue integrable functions// Carpathian Math. Publ. 2022, **14** (2), 437–441.
57. Vasylyshyn T., Algebras of symmetric and block-symmetric functions on spaces of Lebesgue measurable functions// Carpathian Math. Publ. **16** (1) (2024), 174–189.
58. Vasylyshyn T., Zahorodniuk V. On isomorphisms of algebras of entire symmetric functions on Banach spaces// J. Math. Anal. Appl. 2023, Article number 127370.
59. Vasylyshyn T. Symmetric functions on spaces $l_p(\mathbb{R}^n)$ and $l_p(\mathbb{C}^n)$ // Carpathian Math. Publ. 2020,12(1), 5–16.
60. Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A., The space of continuous linear functionals on ℓ_1 approximated by weakly symmetric continuous linear functionals//Symmetry. **17** (2025), №2, Article number 206.
61. Vasylyshyn T., Zhyhallo K. Entire symmetric functions on the space of essentially bounded integrable functions on the union of Lebesgue-Rohlin spaces// Axioms. 2022, **11** (9), art. no. 460.
62. Jacek Bochak and Jozef Siciak (Krakow).Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces// Studia Mathematica, 39(1971), 59–75.
63. Munoz G.A., Sarantopoulos Y. and Tonge A. Complexifications of real Banach spaces, polynomials and multilinear maps// Studia Mathematica, 134(1999), 1-34
64. Hryniv R., Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A., Symmetric and supersymmetric polynomials on ℓ_p and partition functions in quantum statistical physics// Physica Scripta. **100** (2025),№7, Article number 075208.
65. Chernega I., Dmytryshyn R., Kravtsiv V., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A., Function calculus on rings of multisets associated with symmetric and supersymmetric polynomials// Carpathian Math. Publ. **17** (2025), №1, 187–199.

66. Handera-Kalynovska O.V., Kravtsiv V.V., The Waring-Girard formulas for symmetric polynomials on spaces ℓ_p // Carpathian Math. Publ. **16** (2024), №2, 407-413.

67. Zagorodnyuk A., Baziv N., Chopyuk Y., Vasylyshyn T., Burtnyak I., Kravtsiv V., Symmetric and Supersymmetric Polynomials and Their Applications in the Blockchain Technology and Neural Networks// Proceedings of 2023 IEEE World Conference on Applied Intelligence and Computing (AIC), Sonbhadra, India. (2023), 508–513.

68. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces, vol. I, Sequence Spaces//Springer-Verlag, 1977.

69. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces, vol. II, Function Spaces//Springer-Verlag, 1979.

70. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions// Carpathian Math. Publ. 2025. Vol. 17, no. 2. P. 483–515.

71. Varvariuk M.M., Vasylyshyn T.V., Nykorovych I.I., Ponomarov R.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of real Banach spaces of absolutely summable sequences// Precarpathian bulletin of the Schevchenko Scientific Society 2025. Num. 20(76)-2025. P. 24 - 38.

72. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Algebraic bases of some algebras of polynomials on Banach spaces// Mat. Stud. 2025. Vol. 64, no. 1. P. 85-95.

73. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Spectra of algebras of symmetric analytic functions on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions // Res. Math.33(3). 2025 P. 88–112

74. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Algebras of symmetric polynomials on Cartesian products of real and complex Banach spaces of Lebesgue integrable functions// XII International Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv, 23–25 September 2021): book of abstracts.Lviv: Lviv Polytechnic national university. 2025. P. 75.

75. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions// V Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана(Чернівці, 23 - 27 вересня 2024): book of abstracts. Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича 2024. P. 162.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ
ДИСЕРТАЦІЇ ТА ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ
РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати
дисертації

1. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions// Carpathian Math. Publ. 2025. Vol. 17, no. 2. P. 483–515.

DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.17.2.483-515>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105026233234?origin=result>

ISSN: 20759827

2. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Algebraic bases of some algebras of polynomials on Banach spaces// Mat. Stud. 2025. Vol. 64, no. 1. P. 85-95.

DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.64.1.81-91>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105017628811?origin=result>

ISSN: 10274634

3. Varvariuk M.M., Vasylyshyn T.V., Nykorovych I.I., Ponomarov R.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of real Banach spaces of absolutely summable sequences// Precarpathian bulletin of the Shevchenko Scientific Society — 2025. Num. 20(76)-2025. P. 24-38.

DOI: [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20\(76\)-24-38](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-24-38)

URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Pvntsh_ch_2025_20_5

ISSN: 2304-7399.

4. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Spectra of algebras of symmetric analytic functions on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions // Res. Math.33(3) 2025 P. 88–112

DOI: <https://doi.org/10.15421/242530>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/105032425341?origin=result>

ISSN: 26644991

Публікації, що засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Symmetric polynomials on Cartesian products of Banach spaces of Lebesgue integrable functions// V Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана(Чернівці, 23 – 27 вересня 2024): book of abstracts — Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича — 2024. — P. 162.

URL:

<https://drive.google.com/file/d/1ZsaAWT1uYA3q5dPNDiFMhMTQUSuoes-B/view>

2. Ponomarov R.V., Vasylyshyn T.V. Algebras of symmetric polynomials on Cartesian products of real and complex Banach spaces of Lebesgue integrable functions// XII International Skorobohatko Mathematical Conference (Lviv, 23–25 September 2021): book of abstracts — Lviv: Lviv Polytechnic national university. — 2025. — P. 75.

URL: https://drive.google.com/file/d/1n5LOldKODFO8lJWDgsL_-EtgXDk0NzqW/view?usp=drive_link

Відомості про апробацію результатів дисертації

Результати дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на наступних наукових конференціях та семінарах:

1. V міжнародній конференції, присвяченій 145-ій річниці від дня народження Ганса Гана (23 – 27 вересня 2024 року, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича);
2. 12-й міжнародній математичній конференції імені Василя Яковича Скоробогатька (23–25 вересня 2025 року, Львівський Політехнічний національний університет).
3. Наукових семінарах кафедри математичного і функціонального аналізу Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (2022 – 2026 роки).