

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20.051.197
Карпатського національного
університету імені Василя
Стефаника доктору
фізико-математичних наук,
професору Загороднюку Андрію
Васильовичу
(76018, м. Івано-Франківськ, вул.
Шевченка, 57)

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, професора,
завідувача кафедри вищої математики національного університету «Львівська
політехніка» **Філевича Петра Васильовича** на дисертаційну роботу
Пономарьова Ростислава Володимировича
«Алгебри симетричних аналітичних функцій на
декартових добутках банахових просторів»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань
11 Математика та статистика за спеціальністю 111
Математика

Актуальність теми дослідження. Одним із основних напрямків розвитку сучасного нелінійного функціонального аналізу є теорія аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах. Теорія диференціювання функцій від нескінченної кількості змінних розпочала свій розвиток наприкінці XIX – на початку XX століття завдяки роботам В. Вольтерра, М. Фреше, Г. фон Коха, Д. Гільберта, Р. Гато. Сучасне означення аналітичної функції на банаховому просторі було введено незалежно А. Е. Тейлором і А. М. Грейвсом. Також у 1930-х роках розвитком теорії аналітичних функцій на банахових просторах займалися А. Д. Міхал, А. Х. Кліфорд, І. Е. Хайберг, С. Банах, В. Орліч, С. Мазур. Подальший розвиток теорії пов'язаний із дослідженнями М. А. Цорна, А. Картана, М. Ерве, П. Лелона, Л. Нахбіна, А. Мартіна, К. Стейна. Відомо, що сукупності аналітичних функцій на нескінченновимірних просторах у багатьох випадках утворюють алгебри, які можна певним природним чином топологізувати. Важливим прикладом такої алгебри слугує алгебра Фреше $H_b(X)$ всіх цілих функцій обмеженого типу на комплексному банаховому просторі X . Дослідження спектра алгебри Фреше $H_b(X)$ було розпочате в роботі Р. Арона, Б. Коула та Т. Гамеліна. Подальші дослідження проводилися багатьма авторами, зокрема Р. Ароном, П. Галіндо, Д. Гарсією, А. Загороднюком, М.

Маестре, Д. Карандо та В. Дімант. Однак, повний явний опис спектра алгебри в загальному випадку поки що не був отриманий. З іншого боку, якщо підалгебра алгебри $H_b(X)$ містить як щільну підмножину деяку алгебру неперервних поліномів, наділену алгебраїчним базисом, тоді елементи спектра цієї підалгебри однозначно визначаються за допомогою їх значень на елементах алгебраїчного базису і, відповідно, задача опису спектра зводиться до задачі опису множини цих значень. Типовими прикладами такої підалгебри є алгебри Фреше цілих симетричних функцій обмеженого типу на банахових просторах послідовностей з симетричним базисом Шаудера та переставно-інваріантних банахових просторах вимірних за Лебегом функцій.

Як продемонстровано в роботах А. Немировського, С. Семенова, М. Гонсалеса, Р. Гонсало, Х. Харамільо, Т. Василичина, А. Загороднюка, В. Кравців, відповідні алгебри симетричних неперервних поліномів мають злічені алгебраїчні базиси у випадках просторів $X = \ell_p$, та скінченні алгебраїчні базиси у випадках просторів $X = L_p$, де $p \in [1, +\infty)$. Відзначимо, що у випадку алгебри симетричних функцій задача опису спектра далека від тривіальної. Задача повного опису спектра алгебри цілих симетричних функцій обмеженого типу на просторі ℓ_1 була поставлена у 2003 році в роботі Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, А. Загороднюка, і після серії результатів остаточно розв'язана у 2024 році в роботі П. Галіндо, А. Загороднюка, І. Чернеги. Дослідження для випадків декартових степенів просторів $X = L_p$, де $p \in [1, +\infty)$, проведені в роботах Т. Василичина і А. Загороднюка, в даній дисертаційній роботі узагальнено на випадок декартового добутку таких просторів.

Зміст роботи і новизна одержаних результатів. Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 142 сторінки. Список використаних джерел містить 75 найменувань.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми та її зв'язок із науковими програмами, визначено об'єкт, предмет, мету і завдання дослідження, окреслено методи дослідження. Наведено наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів, особистий внесок здобувача, а також інформацію про публікації та апробацію основних результатів дисертації.

Розділ 1 містить огляд літератури та теоретичні основи дослідження. Зокрема, в підрозділі 1.1 простежено історичний розвиток досліджень алгебр аналітичних функцій обмеженого типу на банахових просторах та їхніх підалгебр симетричних аналітичних функцій, що формує концептуальне підґрунтя для подальших досліджень. У підрозділі 1.2 введено основні означення й теореми, які надалі використовуються в роботі.

Розділ 2 описує алгебраїчний базис алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегрованих у відповідних степенях за

Лебегом. В підрозділі 2.1 побудовано множини елементарних симетричних поліномів на декартовому добутку комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, та на декартовому добутку дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом. В підрозділі 2.2 доведено, що алгебраїчним базисом алгебри комплекснозначних неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку комплексних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом $L_{p_1}, \dots, L_{p_n}$, у випадку $p_1 \geq \dots \geq p_n \geq 1$ є множина так званих елементарних симетричних поліномів. В підрозділі 2.3 узагальнено результат підрозділу 2.2 на випадок довільних $p_1, \dots, p_n \geq 1$.

Розділ 3 має на меті відтворення результатів попереднього розділу для добутку дійсних банахових просторів. Проте, у цьому розділі встановлено більш загальний результат, який стосується поліномів на довільному дійсному банаховому просторі. А саме, в підрозділі 3.1, доведено наступний факт. Нехай маємо деяку підалгебру алгебри дійснозначних неперервних поліномів на дійсному банаховому просторі E , таку, що комплексні продовження всіх її елементів містяться у деякій алгебрі комплекснозначних поліномів, яка має алгебраїчний базис. Тоді звуження цього алгебраїчного базису на простір E утворюють алгебраїчний базис початкової підалгебри. За допомогою даного результату в підрозділі 3.2 встановлено, що алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому добутку дійсних банахових просторів функцій, абсолютно інтегровних у відповідних степенях за Лебегом, це множина так званих елементарних симетричних поліномів.

Розділ 4 присвячено опису спектрів алгебр цілих симетричних функцій на згаданих вище декартових добутках. Зокрема, в підрозділі 4.1 описано спектр алгебри Фреше комплекснозначних функцій обмеженого типу на декартовому добутку комплексних банахових просторів функцій, відповідні степені яких абсолютно інтегровні за Лебегом та показано, що ця алгебра ізоморфна до алгебри Фреше цілих функцій на деякому скінченновимірному комплексному просторі. Наступна частина розділу присвячена поширенню цих результатів на деякі алгебри дійснозначних симетричних функцій. Для цього в підрозділі 4.2 доведено ряд результатів загального характеру, які потім використані в підрозділах 4.3 та 4.4 для побудови та опису спектру дійсного аналога згаданої вище алгебри.

Загальні висновки дисертації чітко відображають реалізацію поставлених завдань і наукову цінність отриманих результатів. Список використаних джерел включає сучасні праці науковців. У додатку подано перелік публікацій за темою дисертації і дані про апробацію результатів, що підтверджує впровадження та обговорення результатів дослідження у науковому співтоваристві.

Відсутність порушення академічної доброчесності. За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату, елементів фабрикації та фальсифікації. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У дисертаційній роботі відсутні порушення академічної доброчесності.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Усі основні результати дисертації строго обґрунтовані та супроводжуються коректними математичними доведеннями.

Апробація результатів і публікації. Результати дисертації опубліковано в чотирьох статтях в наукових журналах, три з яких проіндексовано в наукометричній базі даних Scopus і один належить до категорії Б. На момент публікації два зі згаданих журналів входили до другого квартиля і один до першого квартиля за версією Scimago. Також результати дисертації представлено у матеріалах двох наукових математичних конференцій.

Практичне значення результатів дисертації. Результати дисертації мають теоретичне значення і можуть бути застосовані для подальших досліджень алгебр симетричних поліномів та аналітичних функцій на банахових просторах.

Зауваження.

1. В рядку 4 на сторінці 4 пропущено кому перед словами “це множина”
2. Деякі із ключових слів дисертації вжито в однині, інші у множині. Варто було всі вживати у однині.
3. В передостанньому рядку на сторінці 16 замість “з Y ” має бути “з множини Y ”, а замість “обертається на 1” має бути “дорівнює 1”. Також потрібно було явно вказати, що множина X є підмножиною множини Y
4. На сторінці 19 в першому рядку слово “рік” зайве. На цій же сторінці в рядку 10 зайва кома після слова “Залдуендо” та зайва крапка перед відкриваючою дужкою, водночас, пропущено крапку в кінці рядка.
5. На сторінці 21 у завданні 5 символ “ X ” вживається на позначення довільного дійсного банахового простору, а в завданні 6, в якому фактично роль цього простору відіграє декартів добуток просторів вимірних за Лебегом функцій, символ “ X ” вже позначає декартів степінь простору дійсних чисел і виконує зовсім іншу, не пов’язану із попередньою, роль, що тільки заплутує читача. На мою думку, варто було вжити інший символ на позначення декартового степеня простору дійсних чисел.
6. На сторінці 25 в рядку 13 слово “Алгебри” повинно бути в однині. На цій же сторінці в рядку 13 в словосполученні “цілих аналітичних функцій” слово “аналітичних” є надлишковим, бо ціла функція за означенням є аналітичною.

7. Якби дисертант в доведенні леми 2.4 (сторінка 50) скористався означенням неперервності на мові околів замість означення неперервності на мові послідовностей, це б дозволило дещо скоротити доведення.
8. В тексті дисертації символ “ i ” вживається як на позначення уявної одиниці, так і в ролі індексу, який набуває натуральних значень. Хоча у кожному випадку із контексту зрозуміло у якій саме ролі використовується цей символ, усе таки, варто було вживати різні символи для згаданих вище ролей.

Висновок. Вважаю, що дисертаційна робота «Алгебри симетричних аналітичних функцій на декартових добутках банахових просторів» Пономарьова Ростислава Володимировича є завершеною науковою працею, що містить нові важливі наукові результати. Основні результати дослідження є добре висвітлені у наукових працях. Робота повністю відповідає усім вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її автор, Пономарьов Ростислав Володимирович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри вищої математики
Національного університету «Львівська політехніка».

_____ Петро ФІЛЕВИЧ