

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20 051.214
Карпатського національного університету
імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Загороднюку Андрію Васильовичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

ВІДГУК

доктора фізико-математичних наук, професора, завідувача кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка» **Філевича Петра Васильовича** на дисертаційну роботу **Луців Ілони-Анни Василівни «Наближення спеціальних випадків гіпергеометричних функцій Горна H_4 гіллястими ланцюговими дробами»**, подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дослідження

Дисертаційна робота присвячена дослідженню гіллястих ланцюгових дробових розвинень спеціальних випадків гіпергеометричних функцій Горна H_4 .

Неперервні дробі займають важливе місце серед розділів класичного аналізу та тісно пов'язані з теорією чисел, проблемою моментів, теорією ортогональних многочленів, диференціальними рівняннями, квадратурними формулами, спектральною теорією самоспряжених лінійних операторів тощо. Значний внесок у теорію неперервних дробів зробили Л. Ойлер, К.Ф. Гаус, А.-М. Лежандр, К.Г. Якобі, Б. Ріман, Т. Стілтєс та багато інших видатних математиків. Інтерес до застосування неперервних дробів, зокрема, для наближення спеціальних функцій пояснюється їхньою перевагою за певних умов порівняно з іншими математичними інструментами, наприклад, степеневими рядами. У багатьох випадках неперервні дробові зображення аналітичних функцій забезпечують ширші області збіжності, кращу швидкість збіжності та обчислювальну стійкість.

У 1966 році В.Я. Скоробогатко разом з Н.С. Дронюк, О.І. Бобиком та Б.Й. Пташником запропонували гіллясті ланцюгові дробі як багатовимірне узагальнення неперервних дробів. Теорія гіллястих ланцюгових дробів знайшла своє відображення у працях В.Я. Скоробогатка, П.І. Боднарчука, Д.І. Боднара, Х.Й. Кучмінської, М.О. Недашковського, М.С. Сявавка, В. Семашка, А. Кайт, Б. Вердонк, Дж. Мерфі, М. О'Доногое, О.М. Сусь, Т.М. Антонової, Р.І. Дмитришина, В.Р. Гладуна, О.С. Манзій, Н.П. Гоєнко, О.Є. Баран та багатьох інших. Гіллясті ланцюгові дробі успадкували багато властивостей неперервних дробів, але мають свої особливості, зумовлені багатовимірною структурою. Важливим застосуванням гіллястих ланцюгових дробів є побудова раціональних наближень узагальнених та кратних гіпергеометричних функцій, зокрема гіпергеометричної функції Горна H_4 , оскільки вони мають багато різних застосувань у математиці, природничих науках та інших галузях.

У зв'язку з цим задачі побудови гіллястих ланцюгових дробових розвинень для гіпергеометричних функцій Горна H_4 та їх відношень, встановлення критеріїв збіжності,

областей аналітичного продовження, знаходження оцінок похибок наближення та встановлення множин обчислювальної стійкості є предметом розгляду у даній дисертаційній роботі, в актуальності теми якої не повинно виникати жодних сумнівів.

Зміст роботи і новизна одержаних результатів

Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку, який містить відомості про публікацій авторки та апробацію отриманих результатів. Повний обсяг дисертації становить 147 сторінок друкованого тексту, а список використаних джерел містить 93 найменування.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами, сформульовано мету, об'єкт, предмет, завдання та методи дослідження, зосереджено увагу на науковій новизні одержаних результатів, відзначено теоретичне значення отриманих результатів та особистий внесок авторки, наведено дані щодо апробації та публікацій результатів роботи.

Розділ 1 містить огляд літератури за тематикою дослідження, аналіз відомих результатів, що безпосередньо стосуються теми дисертації, та необхідні теоретичні відомості з теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів.

У Розділі 2 встановлено нові трьох- та чотирьох-членні рекурентні співвідношень для гіпергеометричних рядів Горна H_4 , які є основою для побудови формальних гіллястих ланцюгових дробових розвинень гіпергеометричних функцій Горна H_4 та їх відношень у спеціальних випадках. Побудова цих розвинень у підрозділі 2.2 є одним із основних наукових досягнень авторки. Їх подальше дослідження є змістом наступних розділів дисертації.

У розділі 3 встановлено області збіжності побудованих гіллястих ланцюгових дробових розвинень та доведено, що ці області є областями аналітичного продовження гіпергеометричних функцій Горна H_4 та їх відношень у спеціальних випадках з дійсними і комплексними параметрами. Варто зазначити, що авторка не лише застосувала відомі підходи, а й модифікувала їх, що дозволило одержати зазначені результати. Як застосування одержаних результатів наведено приклади, які демонструють, що побудовані гіллясті ланцюгові дробові розвинення спеціальних випадків гіпергеометричних функцій Горна H_4 збігаються та є зображеннями однозначних віток відповідних аналітичних функцій.

Розділ 4 присвячено дослідженню швидкості збіжності та обчислювальної стійкості гіллястих ланцюгових дробових розвинень гіпергеометричних функцій Горна H_4 та їхніх відношень у спеціальних випадках. Для побудованих розвинень отримано оцінки похибки наближення за допомогою формули для різниці двох апроксимант гіллястого ланцюгового дробу. Крім того, за допомогою методу Рунге одержано області аналітичного продовження цих функцій. Наведено числові експерименти, які підтверджують ефективність побудованих гіллястих ланцюгових дробових розвинень порівняно з відповідними подвійними степеневими рядами. У підрозділі 4.2 досліджується обчислювальна стійкість алгоритму зворотної рекурентності для обчислення апроксимант побудованих гіллястих ланцюгових дробових розвинень. Зокрема, знайдено явні формули відносних похибок обчислень та встановлено множини обчислювальної стійкості.

У загальних висновках відображено отримані в дисертації результати, які повністю відповідають меті та завданням дослідження, та перспективи їх застосування.

Список використаних джерел включає як фундаментальні, так і сучасні праці науковців.

У додатку наведено перелік публікацій за темою дисертації і дані про апробацію результатів.

Всі основні наукові результати дисертації є новими. Вони самостійно і вперше отримані її авторкою.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів

Усі отримані у дисертаційній роботі результати достовірні, що забезпечено наявністю строгих та повних доведень або аргументацій. Послідовність та логіка викладу свідчать про високий рівень обґрунтованості результатів сформульованих у дисертації.

Публікації та апробація результатів

Результати дисертаційної роботи опубліковані у провідних наукових журналах України та інших країн. За темою дисертації опубліковано 15 наукових праць, в яких у повній мірі викладені основні результати дисертації, з них 9 публікацій у виданнях, індексованих у базах даних Scopus та/або Web of Science Core Collection, та 5 тез доповідей у матеріалах міжнародних наукових конференцій. Вони також доповідались і обговорювались на кількох фахових семінарах. Усе це підтверджує належну апробацію дослідження.

Практичне значення отриманих результатів

Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, мають теоретичне значення і можуть бути використанні у подальших дослідженнях з теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів. Вони також можуть знайти застосування у суміжних розділах математики, в яких як природні об'єкти дослідження виникають узагальнені та кратні гіпергеометричні функції.

Відсутність порушення академічної доброчесності

За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату, елементів фабрикації чи фальсифікації. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. У дисертаційній роботі відсутні порушення академічної доброчесності.

Зауваження до дисертації

У дисертації досліджено розвинення у гіллясті ланцюгові дроби для спеціальних випадків функцій Горна H_4 . Було б доцільно детальніше окреслити математичні перешкоди, які заважають поширити отримані результати на загальний випадок функції H_4 .

У підрозділі 3.2 отримано складні аналітичні описи областей аналітичного продовження $\mathcal{H}_{\mu,\nu}^{\kappa,\tau}$ та $\mathcal{H}_{\mu,\nu,v}^{\kappa,\tau,v}$ у просторі $\mathbb{C}^2$, які є об'єднаннями бікругів, кардіоїдних областей та півплощин. Тому, як мені видається, робота суттєво виграла б від наявності геометричної ілюстрації або візуалізації проєкцій цих комплексних областей на дійсні площини для наочності сприйняття.

Крім того, незважаючи на загалом добре оформлення дисертації, в ній наявні описки і недогляди. Проілюструємо сказане тільки деякими прикладами:

- 1) с. 32⁴: у символі гіллястих ланцюгових дробів пропущено доданок b_0 ;
- 2) с. 32⁶: написано $a_{i_1}, b_{i_1}, a_{i_1,i_2}, b_{i_1,i_2}, \dots$, а має бути $a_{i_1}, b_0, b_{i_1}, a_{i_1,i_2}, b_{i_1,i_2}, \dots$;
- 3) с. 66₅, 73₅: другим членом послідовності повинен бути $\mathcal{D}_{\tau,\alpha_2\kappa}$ замість $\mathcal{D}_{\tau,\alpha_1\kappa}$;
- 4) с. 79²: помилково написано другим членом послідовності $\mathcal{P}_{\tau,\alpha_1\kappa}$ замість $\mathcal{P}_{\tau,\alpha_2\kappa}$;

5) с. 97⁶: має бути $F_{m+1}^{(m+1)}(\mathbf{z})$ замість $F_{m+1}^{(m+1)}$;

6) с. 125⁹: у виразі ліворуч присутній зайвий знак мінуса.

Зауважу, що зазначені недоліки не є суттєвими, вони жодним чином не впливають на загальне позитивне враження від дисертаційної роботи і ніяк не применшують високої її оцінки.

Загальний висновок

Вважаю, що дисертація «Наближення спеціальних випадків гіпергеометричних функцій Горна H_4 гіллястими ланцюговими дробами» повністю відповідає вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її авторка, Луців Ілона-Анна Василівна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, професор,

завідувач кафедри вищої математики

Національного університету «Львівська політехніка»

_____ Петро ФІЛЕВИЧ