

Голові спеціалізованої вченої ради ДФ 20.051.214
Карпатського національного університету
імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук, професору
Загороднюку Андрію Васильовичу
(76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57)

ВІДГУК

доктора фізико-математичних наук, доцента,
професора кафедри теорії функцій і функціонального аналізу
Львівського національного університету імені Івана Франка Куриляка Андрія Олеговича
на дисертаційну роботу Луців Ілони-Анни Василівни
«Наближення спеціальних випадків гіпергеометричних функцій Горна H_4
гіллястими ланцюговими дробами», подану на здобуття ступеня доктора філософії
в галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дисертаційного дослідження. Гіпергеометричні функції посідають центральне місце у теорії спеціальних функцій, оскільки вони узагальнюють величезну кількість класичних функцій математичного аналізу та є розв'язками широкого класу лінійних диференціальних рівнянь. Перехід до аналізу функцій багатьох змінних зумовив появу кратних гіпергеометричних рядів, серед яких особливе значення мають двовимірні ряди зі знаменитого списку Я. Горна. Гіпергеометричні функції Горна, зокрема функція H_4 , мають фундаментальне значення для математичної фізики. Вони безпосередньо виникають під час розв'язання складних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, які описують фізичні процеси з кількома ступенями вільності. Завдяки своїй математичній структурі ці функції знаходять широке практичне застосування у прикладних задачах квантової механіки, теорії потенціалу, гідро- та аеродинаміки, оптиці, а також у сучасних комп'ютерних науках при моделюванні складних багатовимірних систем і розрахунках інженерних конструкцій.

У теорії наближень найважливішим завданням є пошук найкращих способів апроксимації складних функцій простішими виразами, а також кількісна оцінка результуючих похибок. Одним із найпоширеніших методів є раціональні наближення, потужним інструментом яких є неперервні дроби. Як відомо, порівняно зі степеневими рядами, неперервні дроби забезпечують значно ширші області збіжності, вищу швидкість наближення та можливість ефективного аналітичного продовження функцій за межі їхніх природних кругових областей збіжності. Проте при переході від функцій однієї змінної до функцій багатьох змінних неперервні дроби наражаються на топологічні та алгебраїчні обмеження. Для подолання цих обмежень у 1966 році львівська математична школа під керівництвом В.Я. Скоробогатька запропонувала багатовимірне узагальнення – гіллясті ланцюгові дроби. Гіллясті ланцюгові дроби успадкували найкращі властивості неперервних дробів (широкі області збіжності, швидку збіжність, обчислювальну стійкість) і стали природним інструментом наближення функцій багатьох змінних, зображених кратними степеневими рядами. На відміну від одновимірного випадку, побудова гіллястих ланцюгових дробових розвинень функцій багатьох змінних значно ускладнюється. Проблема дослідження гіллястих ланцюгових дробів полягає в тому, що методи аналізу звичайних неперервних дробів

загалом не переносяться на багатовимірний випадок. Це зумовило необхідність розроблення нових та вдосконалення наявних підходів. Вагомий внесок у становлення та розвиток теорії гіллястих ланцюгових дробів зробили В.Я. Скоробогатько, П.І. Боднарчук, Д.І. Боднар, М.О. Недашковський, М.С. Сявак, Х.Й. Кучмінська та їхні учні.

Дисертаційне дослідження авторки виконане на стику теорії гіллястих ланцюгових дробів та теорії подвійних гіпергеометричних рядів. Н.С. Дронюк та Д.І. Боднар були першими, хто побудував формальні розвинення рядів Аппеля F_1 та F_2 у гіллясті ланцюгові дробі, однак задача їх дослідження залишається відкритою. Значний внесок у цьому напрямі зробили Т.М. Антонова, Р.І. Дмитришин, В.Р. Гладун, Н.П. Гоєнко, О.С. Манзій та інші.

З огляду на зазначене, актуальність теми дисертаційного дослідження зумовлена необхідністю розв'язання сукупності взаємопов'язаних задач. Оскільки класичні степеневі ряди для функцій Горна H_4 обмежені у практичному застосуванні через малі області збіжності, розроблення їхніх раціональних наближень на основі гіллястих ланцюгових дробів набуває важливого значення. Отримання нових рекурентних співвідношень, побудова явних дробових розвинень та встановлення областей їхньої збіжності розширюють межі аналітичного продовження складних двовимірних об'єктів. Водночас логічним складником цього процесу є розв'язання обчислювальних задач дисертації – встановлення апріорних оцінок похибок наближення та визначення множин обчислювальної стійкості, що безпосередньо гарантує надійність і точність комп'ютерних обчислень. Усе це комплексне поєднання теоретичних та прикладних аспектів переконливо підтверджує наукову актуальність та своєчасність теми дослідження.

Зміст роботи і наукова новизна одержаних результатів. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел та додатка. Загальний обсяг роботи становить 147 сторінок, список використаних джерел містить 93 найменування. Структура дисертації є логічною, відповідає меті та завданням дослідження, що забезпечує цілісність, системність та послідовність викладу матеріалу.

У **вступі** чітко обґрунтовано актуальність теми, визначено мету, об'єкт, предмет і завдання дослідження, охарактеризовано методи, новизну, практичне значення, особистий внесок авторки, а також вказано на зв'язок роботи з науковими програмами, апробацію та публікації результатів за темою дисертації.

У **першому розділі** зроблено огляд відомих результатів, що безпосередньо стосуються тематики дослідження, та наведено необхідні теоретичні відомості з теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів.

У **другому розділі** побудовано формальні розвинення гіпергеометричних функцій Горна H_4 та їх відношень у гіллясті ланцюгові дробі. Зокрема, на основі рекурентних співвідношень, одержаних у теоремах 2.2–2.4, побудовано формальні розвинення відношень

$$\frac{H_4(a, c_2; c_1, c_2; \mathbf{z})}{H_4(a+1, c_2; c_1+1, c_2; \mathbf{z})}, \frac{H_4(a, c_2+1; c_1, c_2; \mathbf{z})}{H_4(a+1, c_2+1; c_1, c_2+1; \mathbf{z})}, \frac{H_4(a, c_2+1; c_1, c_2; \mathbf{z})}{H_4(a, c_2+2; c_1, c_2+1; \mathbf{z})}$$

у гіллясті ланцюгові дробі.

У **третьому розділі** встановлено області аналітичного продовження гіпергеометричних функцій Горна H_4 та їх відношень у спеціальних випадках за певних умов на параметри. За допомогою методу РС, що ґрунтується на принципі відповідності, доведено, що областю аналітичного продовження відповідної функції є область збіжності її гіллястого ланцюгового дробового розвинення. У випадку дійсних параметрів такими областями є

декартові добутки двох площин з розрізами, а у випадку комплексних — об'єднання бікругів і декартових добутків кардіоїдних областей і півплощин. У цьому ж розділі наведені приклади зображення деяких функцій двох змінних гіллястими ланцюговими дробами та вказано області їх аналітичного продовження.

У **четвертому розділі** досліджено швидкість збіжності та обчислювальну стійкість гіллястих ланцюгових дробових розвинень гіпергеометричних функцій Горна H_4 та їх відношень у спеціальних випадках. Зокрема, у **підрозділі 4.1** знайдено оцінки похибки наближення побудованих розвинень з дійсними коефіцієнтами і дійсними змінними. У цьому випадку, встановлено області аналітичного продовження цих функцій за допомогою методу РР, що ґрунтується на «властивості вилки» для гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами. Числовими експериментами підтверджено доцільність та ефективність застосування побудованих розвинень до наближення аналітичних функцій. У **підрозділі 4.2** знайдено явні формули для відносних похибок обчислень апроксимант гіллястих ланцюгових дробових розвинень, за допомогою яких встановлено деякі множини обчислювальної стійкості для цих розвинень.

У **загальних висновках** чітко підсумовано отримані у дисертації результати, які повністю відповідають меті та завданням дослідження. Висновки підтверджують цілісність, завершеність і наукову цінність виконаної роботи.

Відсутність порушення академічної доброчесності. За результатами перевірки дисертаційної роботи та наукових публікацій не виявлено фактів академічного плагиату, фабрикації чи фальсифікації. Усі використані в роботі ідеї, результати та фрагменти текстів інших авторів належним чином оформлені з посиланням на першоджерела. Дисертаційна робота відповідає вимогам академічної доброчесності.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Отримані у дисертаційній роботі результати є достовірними та строго обґрунтованими. Усі теоретичні положення супроводжуються чіткими математичними доведеннями або аргументацією, достатньою для підтвердження їхньої істинності.

Апробація результатів і публікації. Основні наукові результати дисертаційної роботи повністю відображені в опублікованих наукових працях авторки. За темою дисертації опубліковано 15 наукових праць, зокрема: 9 статей у наукових фахових виданнях, що індексуються в міжнародних наукометричних базах Scopus та/або Web of Science Core Collection, а також 5 тез доповідей, опубліковані у збірниках матеріалів наукових конференцій. Зміст опублікованих праць повною мірою відтворює сутність дисертаційного дослідження та підтверджує його належну апробацію.

Практичне значення результатів дослідження. Наукові результати, отримані у дисертаційній роботі, носять суто теоретичний характер. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях з теорії неперервних та гіллястих ланцюгових дробів. Можливими є також їх застосування в інших розділах математики, зокрема, в теорії аналітичних функцій чи теорії диференціальних рівнянь.

Зауваження до дисертаційної роботи. До дисертації є низка зауважень, пов'язаних в основному з наявними у ній граматичними помилками чи описками у математичних виразах.

1. На с. 28 замість «V. Ya. Skorobogatko» має бути «V. Ya. Skorobohatko».

2. На с. 5₁₋₂ і 6¹⁻² речення «As a result, in Section 4.1, estimates of approximation errors for branched continued fractions with real coefficients in regions (a domain which may include all, part, or none of its boundary) of the space $\mathbb{R}^2$, which are Cartesian products of two semi-axes, are found» правильніше мало б бути написано «As a result, in Section 4.1,

estimates of approximation errors for branched continued fractions with real coefficients are found in regions of the space $\mathbb{R}^2$ that are Cartesian products of two semi-axes (where a region is a domain which may include all, part, or none of their boundaries)».

3. На с. 16₁ написано «in the works P. I. Bodnarchuk», а повинно бути «in the works of P. I. Bodnarchuk».

4. На с. 21³ замість «S. Shatyn» має бути «S. Sharyn».

5. На с. 24₈₋₉ має бути «does not make sense» замість «does not makes sense».

6. На с. 35⁴⁻⁵ написано «if at most a finite number of its approximants does not make sense», хоча правильніше мало б бути «if at most a finite number of its approximants make no sense».

7. На с. 44¹⁰ у назві «contiguous recurrence relations» наявне зайве слово «recurrence»; має бути «contiguous relations».

8. На с. 65₄ замість $\cos \alpha$ має бути $\cos(\alpha)$.

9. На с. 65₁ написано u_{p+1} , а повинно бути u_{r+1} .

10. На с. 71¹⁰ має бути $F_0^{(0)}(\mathbf{z})$ замість $F_0^{(0)}(z)$.

11. На с. 73₁ замість $\cos \alpha_r$ має бути $\cos(\alpha_r)$.

12. На с. 91³ у знаменнику зайва дужка: має бути $W_{r+1}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2}$, а не $W_{r+1}^{(n)}(\mathbf{z})e^{-i\varphi/2}$.

13. У розділі 3 області аналітичного продовження (наприклад, (3.47) та (3.54)) залежать від додатного параметра κ . У роботі варто було навести практичні рекомендації або чисельний приклад щодо того, як саме досліднику обирати оптимальне значення цього параметра для мінімізації обчислювальних витрат під час розрахунків конкретних фізичних моделей.

Зазначу, що наведені недоліки та зауваження не зменшують вагомості основних результатів дисертації та не впливають на її загальну позитивну оцінку.

Загальний висновок. На підставі зазначеного вище можна зробити висновок, що дисертаційна робота Луців Ілони-Анни Василівни «Наближення спеціальних випадків гіпергеометричних функцій Горна H_4 гіллястими ланцюговими дробами» є завершеною самостійною працею, яка містить нові важливі наукові результати і повністю відповідає вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її авторка заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук,
доцент, професор кафедри
теорії функцій і функціонального аналізу
Львівського національного
університету імені Івана Франка

_____ Андрій КУРИЛЯК