

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20.051.213 Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Шарину Сергію
Володимировичу (76018, м. Івано-
Франківськ, вул. Шевченка, 57)

РЕЦЕНЗІЯ

кандидата фізико-математичних наук, доцента, доцента кафедри
математичного і функціонального аналізу Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника

Марцінків Марії Володимирівни

на дисертаційну роботу **Долішняк Дарини Юріївни**

**«Топологічна транзитивність та хаотичність операторів,
пов'язаних з симетричними та субсиметричними поліномами»,**

подану на здобуття ступеня доктора філософії

в галузі знань 11 Математика та статистика

за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми. Основні результати дисертаційної роботи відносяться до теорії субсиметричних функцій на банахових просторах з субсиметричним базисом та теорії хаосу дискретних динамічних систем на метричних просторах.

Алгебри аналітичних функцій на банахових просторах та їхні спектри досліджувались у роботах Т. Гамеліна, Т. Корна, Б. Коула, Ж. Мухіки, Р. Арона, П. Галіндо, Д. Гарсії, М. Маестре, Х. Харамільо, В. Дімант, Л. Мораес, А. Загороднюка та інших науковців. Симетричні та субсиметричні аналітичні функції на банахових просторах з певними симетричними структурами було досліджено у працях Р. Гонзало, М. Гонзалеза, Х. Харамільо, Р. Аленкара, Р. Арона, П. Галіндо, І. Чернеги, П. Хаєка, Т. Васишлина, А. Загороднюка. У цих роботах було показано, що спектр (множина характерів) деякої підалгебри аналітичних функцій обмеженого типу на банаховому просторі X часто не вичерпується функціоналами значення в точках простору X , тому має власну алгебраїчну і топологічну структуру. З іншого боку, якщо підалгебра аналітичних функцій складається з функцій, що є інваріантними відносно деякої напівгрупи симетрій, множину функціоналів значень в точках можна подати у вигляді фактор-множини X за деяким відношенням еквівалентності. У дисертації розглянуто випадок алгебр субсиметричних поліномів та аналітичних функцій. Субсиметричні функції природно виникають на просторах з субсиметричним базисом, проте, на цей час описано, в загальному випадку, мінімальних твірних систем субсиметричних поліномів та спектри вказаних алгебр. Дисертантка отримала значний прогрес в дослідженні алгебр субсиметричних поліномів та аналітичних функцій та розглянула динаміку операторів, які діють на спектрі алгебри субсиметричних поліномів і є аналогами зваженого зсуву та

диференціювання. Топологічна транзитивність операторів зваженого лівого зсуву на просторі l_2 була встановлена вперше С. Ролевічем у 1969 році. Гіперциклічність оператора диференціювання на просторі цілих функцій однієї змінної було встановлено у роботі Ж. Годєфруа та Ж. Шапіро у 1991 році. Пізніше ці дослідження було продовжено багатьма авторами. Хаотична поведінка операторів зсуву і диференціювання у просторах функцій від нескінченної кількості змінних досліджувалась в працях Р. Арона, Х. Беса, З. Новосад, А. Загороднюка, І. Чернеги, О. Голубчака. Результати дисертації узагальнюють результати цих авторів на випадок субсиметричних аналітичних функцій.

Таким чином, тема дисертаційної роботи, безумовно, є важливою та актуальною.

Аналіз змісту роботи. За змістом дисертація Долішняк Дарини Юріївни «Топологічна транзитивність та хаотичність операторів, пов'язаних з симетричними та субсиметричними поліномами», представлена на здобуття наукового ступеня доктора філософії, повністю відповідає спеціальності 111 Математика.

Дисертація складається зі вступу, 3 розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 140 сторінок. Список використаних джерел містить 53 найменування.

У першому розділі дисертації зроблено ґрунтовний історичний огляд теорії аналітичних відображень на банахових просторах, сформульовано основні означення та попередні відомі результати, введено позначення, які використовуються в основному тексті дисертації.

У другому розділі дисертації сформульовано та доведено основні властивості алгебр субсиметричних поліномів та аналітичних функцій і наведено приклади їх застосування. У підрозділі 2.1, зокрема, показано, що два вектора x, y в просторі l_p будуть еквівалентними тоді $P(x)=P(y)$ для кожного субсиметричного полінома P . Цей результат використано у підрозділі 2.4 для відновлення самоспряженого оператора за значеннями субсиметричних поліномів на спектрі. У підрозділі 2.2 запропоновано універсальний метод продовження субсиметричних аналітичних функцій на просторах l_p до функцій на просторах $l_p(A)$ для довільної цілком впорядкованої множини A . При цьому, показано, що оператор продовження є неперервним гомоморфізмом алгебр. Цей оператор продовження було використано у підрозділі 2.8 для встановлення умов апроксимації субсиметричних неперервних функцій субсиметричними поліномами та для побудови операторів субсиметричного диференціювання і доведення його властивостей. У підрозділі 2.3 наведено приклади субсиметричних поліномів на деяких класичних гільбертових просторах. У підрозділі 2.5 досліджено множини нулів субсиметричних поліномів та їх продовжень. У підрозділі 2.6 доведено, що неперервний поліном є субсиметричним тоді і тільки тоді, коли його ядро є субсиметричною множиною. Цей результат використано для доведення факторіальності алгебри субсиметричних поліномів. У підрозділі 2.7 введено новий клас прото-субсиметричних поліномів і перенесено для цього класу результати попереднього підрозділу.

У третьому розділі дисертації розглянуто симетричні та субсиметричні аналоги операторів зсуву і диференціювання та встановлено умови їх топологічної транзитивності, гіперциклічності і хаотичності. У підрозділі 3.1 введено різні метрики на множині мультимножин, пов'язаній зі спектром алгебри симетричних поліномів та досліджено їх повноту та інші властивості. Аналогічну роботу проведено у підрозділі 3.2 для множини впорядкованих підмножин, яка є пов'язаною зі спектром алгебри субсиметричних поліномів. У підрозділі 3.3 введено аналоги операторів зваженого лівого зсуву на множині мультимножин і встановлено умови їх топологічної транзитивності. При цьому встановлено досить загальну умову топологічної транзитивності для відображень метричної напівгрупи в себе. У підрозділі 3.4 введено аналог операторів зваженого лівого зсуву на множині впорядкованих мультимножин і встановлено умови його топологічної транзитивності. У підрозділі 3.5 доведено властивість змішуваності (з якої випливає гіперциклічність) для операторів субсиметричного диференціювання та доведено хаотичність таких операторів. Також, досліджено змішуваність і хаотичність лівих обернених до операторів субсиметричного перетворення.

Наукова новизна та практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота містить нові та оригінальні результати з теорії субсиметричних аналітичних функцій на банахових просторах та теорії дискретних динамічних систем. Робота має теоретичний характер. Її результати можуть бути використані в нелінійному функціональному аналізі, математичній фізиці, теорії динамічних систем, інформатиці, статистичній квантовій механіці. Крім того, результати дослідження можуть бути включені у спецкурс для аспірантів «Спектри топологічних алгебр».

Ступінь обґрунтованості та достовірності положень, висновків і рекомендацій, сформульованих у дисертації. Усі результати дисертаційного дослідження є строго обґрунтованими. Основні теореми і твердження чітко сформульовані, до них наведені повні доведення, що забезпечує достовірність основних положень та висновків дисертаційної роботи.

Апробація результатів дисертації і публікації. Основний зміст дисертації висвітлено в 3 наукових статтях у фахових журналах, які індексуються наукометричними базами Scopus та/або Web of Science, та апробовано на міжнародних конференціях (5 публікацій у матеріалах конференцій), наукових семінарах.

Відсутність порушення академічної доброчесності. Аналіз тексту дисертації та публікацій автора за темою дисертації свідчить про відсутність ознак порушення вимог академічної доброчесності. У дисертаційній роботі і публікаціях автора наявні посилання на джерела інформації у разі використання ідей чи результатів інших авторів. У дисертаційній роботі Долішняк Д.Ю. не виявлено ознак академічного плагіату.

Зауваження до змісту та тексту дисертації:

1. У доведенні Теореми 2.2 використано конструкцію «Такий елемент існує, оскільки...» без окремого пояснення, чому координати можуть повторюватися лише скінченну кількість разів. Було б доцільно додати коротке обґрунтування цього факту або посилання на відповідний

результат.

2. На сторінці 81 допущено граматичну помилку «Нагадаємо, що напівгрупа $\mathfrak{S}$ породжену множиною...», правильно «...породжена множиною...».
3. На початку третього розділу зазначено, що розглядаються аналоги операторів лівого зсуву. Було б корисно коротко пояснити, чому саме така конструкція оператора є природною для просторів мультимножин та чим вона принципово відрізняється від класичного оператора зсуву.
4. У роботі допущено декілька пунктуаційних помилок, наприклад на сторінках 55, 62, 64.

Висновки. Дисертаційна робота Долішняк Дарини Юріївни «Топологічна транзитивність та хаотичність операторів, пов'язаних з симетричними та субсиметричними поліномами» є завершеною самостійною працею з оригінальним авторським дослідженням, яке повністю відповідає всім вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її авторка, Долішняк Дарина Юріївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичного і
функціонального Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника

Марія МАРЦІНКІВ