

Голові спеціалізованої вченої ради  
ДФ 20.051.200  
Карпатського національного  
університету імені Василя Стефаника  
доктору фізико-математичних наук,  
професору Загороднюку Андрію Васильовичу  
(76018, м. Івано-Франківськ,  
вул. Шевченка, 57)

## РЕЦЕНЗІЯ

доктора фізико-математичних наук, професора,  
професора кафедри математичного і функціонального аналізу  
Карпатського національного університету імені Василя Стефаника  
**Василишина Тараса Васильовича** на дисертаційну роботу  
**Самарук Наталії Миколаївни**  
«Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи»,  
подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань 11 Математика та  
статистика за спеціальністю 111 Математика

Дисертаційна робота Самарук Наталії Миколаївни присвячена дослідженню квазі-мономіальних многочленів підгруп афінної групи, зокрема таких підгруп, як групи паралельних перенесень, масштабувань та обертань. Тема лежить на перетині теорії спеціальних функцій та її застосувань у машинному навчанні. У роботі запропоновано підхід, що поєднує ідеї класичної теорії многочленів із сучасними задачами аналізу зображень. Загалом, дисертація має фундаментально-теоретичний характер, одночасно демонструючи потужний потенціал прикладних застосувань.

**Актуальність.** Актуальність теми не викликає сумнівів. По-перше, у сучасній математиці та суміжних галузях існує потреба у розробці нових математичних структур для побудови інваріантних ознак та опису квазі-мономіальних сімей многочленів, узгоджених із дією підгруп афінної групи. По-друге, дослідження має значення в теорії розпізнавання образів та аналізі 2D і 3D-зображень. Робота відкриває можливості для подальших прикладних досліджень, зокрема у задачах аналізу зображень та розпізнавання образів, де важливу роль відіграють інваріантні ознаки. Запропонований автором підхід, що поєднує методи теорії груп і теорії спеціальних функцій, становить актуальний напрям досліджень в абстрактній алгебрі. Таким чином, дисертація вирішує важливу наукову проблему, поєднуючи теоретичну новизну з практичними запитами сучасної науки, і відповідає пріоритетним напрямкам розвитку фундаментальних досліджень.

Результати дисертації висвітлено в 8 наукових публікаціях, серед яких 1 у фаховому виданні із фізико-математичних наук; 2 – у виданнях, включених до наукометричної бази Scopus; решта 5 – у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій.

**Зміст роботи.** Структура роботи охоплює вступ, чотири розділи, загальні висновки, список літератури, що містить 49 джерел, та 5 додатків. Така

побудова є внутрішньо узгодженою з метою та завданнями дослідження й забезпечує цілісний, послідовний виклад матеріалу.

Математичне ядро роботи становить дослідження дії підгруп афінної групи на просторі многочленів і побудова базисів, у яких матриці групових операторів мають такий самий вигляд, що й матриці відповідних операторів у стандартному степеневому базисі. Це відкриває можливість інтерпретації отриманих результатів у термінах лінійних представлень груп. Отримані результати узагальнюють класичний підхід і описують ширший клас систем, узгоджених із груповими симетріями.

У **вступі** окреслено мету дисертації – опис спеціальних функцій, які є квазі-мономами відносно підгруп афінної групи площини та простору. Обґрунтовано актуальність теми, сформульовано об'єкт, предмет, завдання, наведено інформацію про наукову новизну, методи дослідження й апробацію результатів.

У **першому розділі** «Огляд літератури, вибір методів дослідження та допоміжні результати» проведено комплексний теоретико-методологічний аналіз стану сучасних досліджень у галузі моментної інваріантності та методів представлення цифрових сигналів за допомогою поліноміальних базисів, здійснено вибір методів дослідження та наведено допоміжні результати.

У **другому розділі** «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини» наведено визначення та основні результати щодо опису всіх сімей многочленів від двох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп афінної групи площини  $\text{Aff}(2)$ : обертань, групи паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень, масштабувань, рівномірних масштабувань.

У **третьому розділі** «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору» наведено опис усіх сімей многочленів від трьох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп (масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень та рівномірних паралельних перенесень) афінної групи простору  $\text{Aff}(3)$ . Крім того, встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності.

У **четвертому розділі** « $SO(3)$ -квазі-мономіальні сім'ї» пропонується опис, аналогічний двовимірному випадку, сім'ї многочленів, яка є квазі-мономіальною відносно групи обертань простору. Ключовим результатом роботи є встановлення необхідних і достатніх умов квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій. Зокрема, доведено, що сім'я многочленів є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція виражається через функції від базових інваріантів дії відповідної групи перетворень (у випадку  $SO(3)$ :  $ux + vy + wz$ ,  $x^2 + y^2 + z^2$ ,  $u^2 + v^2 + w^2$ ). Такий підхід забезпечує повний опис відповідних класів многочленів. Також в цьому розділі встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає квазі-мономіальну властивість. Крім того, в розділі показано, що біортогональні поліноми Аппеля від трьох змінних утворюють приклад  $SO(3)$ -квазі-мономіальної сім'ї, та наведено для них рекурентні співвідношення.

**Наукова новизна.** Отримані дисертантом наукові результати полягають, зокрема, у такому:

- отримано опис сімей многочленів від двох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп афінної групи площини;
- встановлено необхідні і достатні умови квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій;
- побудовано та досліджено класи квазі-мономів від трьох змінних відносно підгруп афінної групи простору;
- отримано критерії збереження квазі-мономіальності при нормуванні;
- доведено, що біортогональні поліноми Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами відносно групи обертань простору.

Отримані наукові результати є новими та роблять відчутний внесок у сучасну математику; їхню наукову новизну підтверджують публікації автора й апробація на міжнародних конференціях. Обґрунтованість та достовірність отриманих у дисертації наукових результатів не викликає сумнівів. Усі основні твердження і теореми, представлені в роботі, мають строгі математичні доведення, наведені авторкою у повному обсязі. Авторка демонструє володіння апаратом абстрактної алгебри і аналізу: доведення побудовано логічно, з урахуванням відомих фактів і попередніх отриманих результатів, послідовність викладу доказів переконлива. Достовірність результатів підтверджується також тим, що всі основні результати пройшли апробацію на наукових конференціях і опубліковані в журналах, де їх було перевірено незалежними експертами.

**Теоретичне та практичне значення отриманих результатів.** Результати дисертації збагачують інструментарій комбінаторики, теорії груп і теорії спеціальних функцій. Попри те, що робота має теоретичний характер, здобуті результати мають помітне практичне значення і потенціал до застосування в суміжних галузях. Серед можливих напрямів застосування можна відзначити задачі аналізу зображень та розпізнавання образів, де використовуються інваріантні характеристики. Запропонований математичний апарат може бути використаний у теорії розпізнавання образів та аналізі 2D і 3D-зображень. Хоча ці застосування виходять за межі суто математичного дослідження, вони стимулюють подальші міждисциплінарні дослідження.

Таким чином, практичне значення роботи проявляється як безпосередньо, зокрема в задачах аналізу зображень, так і опосередковано – через вплив на розвиток інших підрозділів математики, що в перспективі може призвести до нових відкриттів і технологій.

Дисертація виконана авторкою самостійно. Усі наукові результати є новими та належать здобувачу, що підтверджується публікаціями, апробацією результатів на конференціях та перевіркою на академічний плагіат. Робота відповідає вимогам академічної доброчесності.

Текст дисертації добре структурований і написаний грамотним стилем, проте є декілька незначних моментів, на які хочеться звернути увагу:

- Робота могла б бути суттєво посилена формулюванням результатів у термінах теорії представлень груп (еквівалентність представлень, інваріантні підпростори тощо).

- Термін «квазі-мономіальні многочлени» використано у різних контекстах. Потрібно чіткіше розмежувати суто алгебраїчне визначення та його прикладну інтерпретацію.

- Оформлення бібліографії – можливо, варто додати більше посилань на сучасні закордонні праці (останні 3-5 років), що стосуються групо-еквіваріантних нейронних мереж (G-CNN), оскільки робота закладає для них математичний фундамент.

- У дисертації експоненціальні породжуючі функції використовуються як формальні степеневі ряди. Можна було б окремо зазначити цей факт або обговорити можливі аналітичні аспекти відповідних функцій.

Зазначені зауваження мають рекомендаційний характер і не знижують загальної високої оцінки дисертаційної роботи. В цілому, текст роботи відповідає вимогам до академічного письма: виклад логічний, послідовний і зрозумілий, стиль науковий і коректний.

Дисертація Самарук Наталії Миколаївни є цілісною завершеною науковою працею, в якій проведено аналіз квазі-мономіальних сімей многочленів підгруп афінної групи та отримано низку важливих наукових результатів. Отримані результати відзначаються високим рівнем наукової новизни та значущості, вони належним чином обґрунтовані і достовірні. Практична цінність роботи підтверджується можливістю застосування отриманих результатів у розробці алгоритмів машинного навчання, орієнтованих на розпізнавання та класифікацію зображень. Дисертація підготовлена особисто авторкою, містить оригінальні ідеї та демонструє здатність авторки проводити самостійні дослідження.

Дисертація «**Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи**» повністю відповідає вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами). Її авторка, Самарук Наталія Миколаївна, заслуговує на присудження ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

**Рецензент:**

доктор фізико-математичних наук, професор,  
професор кафедри математичного і  
функціонального аналізу  
Карпатського національного університету  
імені Василя Стефаника

Тарас ВАСИЛИШИН