

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20.051.200
Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Загороднюку Андрію Васильовичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

РЕЦЕНЗІЯ

кандидата фізико-математичних наук, доцента
Карпатського національного університету імені Василя Стефаника
Марцінків Марії Володимирівни
на дисертаційну роботу **Самарук Наталії Миколаївни**
«Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи»,
подану на здобуття ступеня доктора філософії
в галузі знань 11 Математика та статистика
за спеціальністю 111 Математика

Дисертаційна робота присвячена дослідженню квазі-мономіальних многочленів підгруп афінної групи.

Актуальність теми дисертації зумовлена кількома чинниками. Зокрема, для розпізнавання 2D і 3D-зображень, класифікації та виділення об'єктів на зображеннях за допомогою методів машинного навчання необхідно знаходити ознаки, що залишаються інваріантними до дії груп геометричних перетворень: обертань, паралельних перенесень та масштабувань.

Класичним математичним інструментом побудови таких ознак є моментні інваріанти. Алгебра геометричних моментних інваріантів добре досліджена і має явний опис породжувальних елементів. Проте використання геометричних моментів пов'язане з обчислювальною нестабільністю в дискретних областях, оскільки мономи $x^m y^n$ швидко зростають зі збільшенням порядку моментів та розмірів зображення, що призводить до накопичення чисельних похибок.

Одним із підходів до подолання цієї проблеми є використання ортогональних моментів (Зерніке, Ерміта, Лежандра), які характеризуються кращою чисельною стійкістю. Однак у цьому випадку виникають труднощі з побудовою моментних інваріантів у новому поліноміальному базисі. Відповідні методи розроблено лише для окремих сімей ортогональних многочленів, зокрема для моментів Лежандра, і переважно для простіших класів геометричних перетворень, що не включають обертання.

Отже, проблеми чисельної нестабільності геометричних моментів та складність побудови моментних інваріантів у нових базисах зумовлюють потребу у таких системах многочленів, які поєднували б чисельну стійкість із збереженням інваріантної структури. Ідея полягає у заміні мономів $x^m y^n$ поліноміальними базисами, що мають той самий закон перетворення відносно дії груп геометричних перетворень, забезпечують кращу чисельну стійкість і дають

змогу будувати моментні інваріанти за класичною схемою. Саме дослідженню таких сімей многочленів присвячена дисертаційна робота Самарук Н.М. Цю властивість названо квазі-мономіальністю. Запропонований клас квазі-мономів узагальнює класичний підхід до побудови моментних інваріантів, зберігаючи їхню інваріантну структуру та забезпечуючи кращу чисельну стійкість обчислень.

У зв'язку з цим актуальність дослідження квазі-мономів відносно різних підгруп афінної групи перетворень площини та простору та встановлення їхніх властивостей є цілком обґрунтованою.

Результати дисертаційного дослідження опубліковано у 8 наукових працях, серед яких 1 стаття у фаховому виданні, 2 публікації у фахових міжнародних виданнях, що входять до наукометричної бази даних Scopus, 5 тез доповідей у матеріалах наукових конференцій.

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел (49 найменувань) та 5 додатків. Структура дисертації логічна і відповідає меті та поставленим завданням, забезпечуючи цілісність і послідовність викладу матеріалу.

У **вступі** чітко обґрунтовано актуальність обраної теми, сформульовано об'єкт, предмет, мету та завдання дослідження, окреслено застосовані методи. Виділено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, зазначено особистий внесок здобувача, наведено відомості про публікації та апробацію основних результатів.

У **розділі 1** здійснено огляд літератури за тематикою дисертації та викладено необхідні теоретичні основи дослідження. Здійснено вибір методів дослідження та наведено допоміжні результати.

У **розділі 2** наведено визначення та основні результати щодо опису усіх сімей многочленів від двох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп афінної групи площини: групи паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень, масштабувань, рівномірних масштабувань, обертань.

У **розділі 3** отримано опис усіх сімей многочленів від трьох змінних, які є квазі-мономіальними відносно підгруп масштабувань та паралельних перенесень афінної групи простору $Aff(3)$. Крім того, встановлено умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності.

У **розділі 4** наведено повний, аналогічний двовимірному випадку, опис сім'ї многочленів трьох змінних, яка є квазі-мономіальною відносно групи обертань простору $SO(3)$. Встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає квазі-мономіальну властивість. Також в цьому розділі показано, що біортогональні поліноми Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами $SO(3)$.

Наукова новизна дисертаційної роботи полягає в тому, що всі отримані та наведені нижче результати одержано автором уперше. Зокрема:

-- Запроваджено поняття квазі-мономіальних сімей многочленів відносно підгруп афінних груп перетворень площини та простору.

-- Отримано опис у термінах експоненціальних породжуючих функцій сімей квазі-мономіальних многочленів, відносно підгруп афінних груп площини та простору (обертань, масштабувань, паралельних перенесень).

-- Досліджено умови нормалізації, за яких зберігається квазі-мономіальність многочленів, відносно групи паралельних перенесень площини та простору, а також відносно групи обертань простору.

-- Доведено, що дві сім'ї біортогональних многочленів Апеля від трьох змінних є квазі-мономіальними відносно групи обертань простору, та знайдено рекурентні співвідношення для цих сімей.

Наукові результати належним чином обґрунтовані і підтверджені строгими математичними доведеннями, наведеними в тексті дисертації.

Висновки дисертанта аргументовані, логічно впливають із проведених досліджень.

Отримані результати мають **теоретичний і прикладний характер**. Отримані результати можуть бути використані у комбінаториці, теорії груп і теорії спеціальних функцій, а також у теорії розпізнавання образів та аналізі зображень, інваріантних відносно геометричних перетворень площини або простору.

Отримані результати становлять інтерес для досліджень, що проводяться в Карпатському національному університеті імені Василя Стефаника та можуть бути використані у наукових дослідженнях, що проводяться в інших науково-дослідних установах, а також впроваджені в освітній процес закладів вищої освіти.

Під час виконання дисертації здобувач дотримувався принципів академічної доброчесності. За результатами перевірки та аналізу тексту роботи не виявлено жодних ознак академічного плагіату, фабрикації чи фальсифікації.

Зауваження до змісту та тексту дисертації:

1. У роботі основна увага приділена підгрупам афінної групи (паралельних перенесень, обертань, масштабувань). Доцільно було розглянути можливість узагальнення отриманих результатів на ширші класи лінійних або афінних груп перетворень.

2. Однією з переваг роботи заявлено стійкість обчислень. Проте, у роботі відсутній детальний аналіз накопичення похибок при обчисленні моментів дуже високих порядків у порівнянні з ортогональними моментами Зерніке.

3. У роботі не обговорюється, якою мірою некомутативність групи $SO(3)$ впливає на структуру побудованих квазі-мономіальних сімей та їхні властивості.

4. У дисертації основні результати сформульовано переважно для дій підгруп афінної групи над дійсними просторами. Було б цікаво обговорити можливість узагальнення побудованої теорії на комплексний випадок або на простори більшої розмірності.

Наведені зауваження мають технічно-редакційний характер, можуть бути виправлені та не знижують загальної цінності отриманих результатів та позитивної оцінки дисертації Н.М.Самарук.

Дисертаційна робота Самарук Наталії Миколаївни «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи» є завершеним самостійним науковим дослідженням. Виконана робота свідчить про добрий рівень наукової підготовки здобувача, а результати роботи відзначаються обґрунтованістю та достовірністю.

Підсумовуючи викладене, вважаю, що рецензована дисертаційна робота Самарук Наталії Миколаївни за змістом, структурою, оформленням та рівнем

апробації результатів повністю відповідає вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами). Автор дисертації, Самарук Наталія Миколаївна, заслуговує на присудження ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Рецензент:

Кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математичного і
функціонального аналізу
Карпатського національного університету
імені Василя Стефаника

Марія МАРЦІНКІВ