

Голові спеціалізованої вченої ради
ДФ 20.051.200
Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника
доктору фізико-математичних наук,
професору Загороднюку Андрію Васильовичу
(76018, м. Івано-Франківськ,
вул. Шевченка, 57)

ВІДГУК

офіційного опонента, доктора фізико-математичних наук, доцента, старшого
наукового співробітника відділу алгебри Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Сохацького Федора Миколайовича

на дисертаційну роботу

Самарук Наталії Миколаївни

«Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи»,

подану на здобуття ступеня доктора філософії в галузі знань

11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика

Актуальність теми дослідження. Дисертація присвячена дослідженню квазі-мономіальних многочленів підгруп афінної групи площини та простору. Актуальність теми дослідження зумовлена потребою подальшого розвитку поняття квазі-мономіальних многочленів як інструмента побудови стійких моментних інваріантів у задачах аналізу 2D і 3D-зображень. Класичні моментні інваріанти мають зручну теоретичну форму, проте їх практичне використання часто обмежується чисельною нестабільністю, особливо при роботі з дискретними даними та великими порядками моментів. У цьому контексті квазі-мономіальні базиси є ефективним засобом, оскільки поєднують дві ключові переваги: з одного боку, вони дозволяють зберігати просту форму інваріантів

при дії груп перетворень, а з іншого – відкривають шлях до побудови обчислювально стійких систем моментів, придатних для практичних застосувань. Актуальність проблеми визначається тим, що отримані результати мають значення не лише для комбінаторики, теорії груп і теорії спеціальних функцій, але й для теорії розпізнавання образів та аналізу зображень, оскільки розроблений математичний апарат є важливим для створення інваріантних ознак, які дозволяють системам машинного навчання коректно розпізнавати об'єкти незалежно від їх положення, орієнтації та розміру на зображенні.

Структура дисертації. Дисертація (її повний обсяг становить 149 сторінок друкованого тексту) складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел, що містить 49 найменувань.

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційного дослідження, сформульовано мету, завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, зазначено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, подано інформацію про апробацію та публікацію результатів дисертаційного дослідження.

Перший розділ містить детальний історичний огляд розвитку понять, дотичних до квазі-мономіальних многочленів і присвячений аналізу літератури за темою дослідження. У ньому здійснено вибір методології, сформульовано підходи до побудови теорії квазі-мономів та наведено допоміжні результати, необхідні для інтенсивніших досліджень.

Другий розділ присвячено означенню та дослідженню основних властивостей квазі-мономів відносно підгруп афінної групи площини. В цьому розділі розглянуто формування основних математичних понять, що передують введенню квазі-мономів, та подано означення квазі-мономіальності. Наведено основні означення та теореми щодо квазі-мономів відносно групи обертань площини $SO(2)$, масштабувань та паралельних перенесень площини. Сформульовано критерії квазі-мономіальності відносно зазначених підгруп афінної групи площини у термінах експоненціальної породжуючої функції. Крім того, встановлено, який вид нормалізації зберігає властивість квазі-

мономіальності. Також наведено рекурентні співвідношення для сім'ї квазі-мономіальних многочленів.

У третьому розділі дається опис квазі-мономів від трьох змінних відносно підгруп афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. Розглянуто квазі-мономи щодо групи масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень та рівномірних паралельних перенесень простору. Описано сім'ї многочленів, які є квазі-мономіальними відносно зазначених груп простору в термінах експоненціальної породжуючої функції. Також встановлено тип нормалізації, який зберігає властивість квазі-мономіальності.

У четвертому розділі описано квазі-мономи відносно групи обертань простору $SO(3)$. Доведено, що многочлени Ерміта від трьох змінних є квазі-мономами відносно $SO(3)$. Встановлено умови нормалізації, які зберігають властивість квазі-мономіальності. У цьому розділі також доведено, що біортогональні многочлени Аппеля є квазі-мономами $SO(3)$, а також подано рекурентні співвідношення, що забезпечують ефективність їх обчислення. Окрему увагу приділено галузям застосування квазі-мономіальних многочленів.

Відсутність порушення академічної доброчесності. За результатами перевірки дисертаційної роботи та публікацій не виявлено ознак академічного плагіату, елементів фабрикації та фальсифікації. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів супроводжується посиланнями на відповідні джерела.

Обґрунтованість і достовірність одержаних результатів. Усі основні результати дисертації належно обґрунтовані та супроводжуються коректними математичними доведеннями.

Апробація результатів і публікації. Результати дисертації опубліковано у 8 публікаціях: в трьох статтях, дві з яких входять до наукометричної бази Scopus, та п'яти публікаціях у збірниках тез математичних конференцій.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі вперше одержано низку результатів, що становлять значний інтерес. Зокрема:

— введено поняття сімей квазі-мономіальних многочленів відносно підгруп афінних груп перетворень площини та простору;

– описано у термінах експоненціальних породжуючих функцій сім'ї квазі-мономіальних многочленів відносно підгруп обертань, масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень площини та простору;

– встановлено типи нормалізації, за яких зберігається властивість квазі-мономіальності многочленів відносно групи паралельних перенесень площини та простору, а також відносно групи обертань простору;

– встановлено, що дві сім'ї біртогональних многочленів Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами відносно групи обертань простору, та знайдено рекурентні співвідношення для цих сімей.

Практичне значення результатів дисертації. Результати дисертації мають як теоретичне, так і практичне значення.

Теоретичне значення роботи полягає у розвитку теорії квазі-мономіальних многочленів та її узагальненні на широкий клас підгруп афінних груп площини та простору. Використання інструменту експоненціальних породжуючих функцій дозволяє отримати опис квазі-мономіальних сімей та встановити необхідні й достатні умови їх існування. Вартим уваги є обґрунтування зв'язку між квазі-мономіальними сім'ями та біртогональними многочленами Аппеля, що встановлює взаємозв'язок між теорією спеціальних функцій, комбінаторикою та теорією груп. Результати дисертації формують математичний апарат для дослідження інваріантних поліноміальних базисів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у можливості їх застосування в задачах комп'ютерного зору та машинного навчання. Запропоновані квазі-мономіальні базиси дозволяють будувати інваріантні ознаки зображень відносно обертань, масштабувань та паралельних перенесень; дозволяють зменшувати обчислювальну складність алгоритмів за рахунок використання породжуючих функцій та рекурентних формул; створюють умови для інтеграції квазі-мономіальних моментів у сучасні архітектури глибокого навчання.

Галузь використання. Дисертаційна робота має теоретичний і практичний характер. Отримані результати мають фундаментальний

теоретичний характер та можуть бути використані для розвитку нових математичних теорій. Проте отримані результати можуть бути корисними та можуть бути використані при розробці систем розпізнавання образів, аналізу медичних та тривимірних зображень, а також у задачах обробки сигналів, робототехніки, біоінформатики та інших галузях, де суттєву роль відіграють інваріантні характеристики об'єктів.

В цілому дисертація справляє позитивне наукове враження. Вона поєднує ідеї з різних досить віддалених областей науки, зокрема, теорію спеціальних функцій та теорію розпізнавання образів, що є актуальним напрямом сучасних математичних досліджень» та відповідає сучасним тенденціям міждисциплінарних досліджень.

Зауваження. Дисертація акуратно оформлена. Вона містить цікаві історичні екскурси. Проте робота не позбавлена недоліків:

1. Деякі означення та твердження сформульовані надто загально. Зокрема, твердження про «повний опис» квазі-мономіальних сімей потребують точнішого уточнення класу породжуючих функцій, у межах якого цей опис є повним.

2. У дисертації наведено список умовних позначень, однак для полегшення сприйняття матеріалу, зважаючи на використання значної кількості взаємопов'язаних понять («квазі-мономи», «квазі-мономіальні сім'ї», «квазі-мономіальні базиси» тощо), доцільно було б доповнити його короткими поясненнями або окремою узагальнювальною таблицею основних термінів.

3. У роботі досліджуються квазі-мономіальні сім'ї відносно підгруп афінної групи, однак майже не розглядаються можливості узагальнення одержаних результатів на ширші класи груп перетворень, наприклад проєктивні чи конформні групи. Навіть коротке обговорення таких перспектив могло б додатково підсилити роботу.

4. Деякі фрагменти вступу є досить об'ємними та містять значний огляд сучасних методів машинного навчання. Частину цього матеріалу доцільно було б скоротити або перенести до огляду літератури, що зробило б вступ більш лаконічним і зосередженим на основній тематиці дослідження.

Проте, ці зауваження не зменшують наукової цінності дисертації і є побажаннями для дослідження та оформлення подальших результатів.

Висновок. Вважаю, що дисертаційна робота «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи» Самарук Наталії Миколаївни є завершеною науковою працею, що містить нові важливі наукові результати з цікавими потенційними застосуваннями у машинному навчанні. Основні результати дослідження висвітлені у наукових працях. Робота повністю відповідає усім вимогам спеціальності 111 Математика та вимогам наказу Міністерства освіти і науки України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» (зі змінами), «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженого Постановою Кабінету Міністрів України від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами), а її автор, Самарук Наталія Миколаївна, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Офіційний опонент:

доктор фізико-математичних наук, доцент,
старший науковий співробітник відділу алгебри
Інституту прикладних проблем механіки і
математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

_____ Федір СОХАЦЬКИЙ