



ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з науково-педагогічної
роботи і міжнародної діяльності
Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника
кандидат хімічних наук, доцент
Лілія ТУРОВСЬКА

31 "Березня" 2026 р.

ВИТЯГ

з протоколу №1 від 25 березня 2026 р. фахового семінару
кафедри математичного і функціонального аналізу
Карпатського національного університету імені Василя Стефаника

ПРИСУТНІ:

з кафедри математичного і функціонального аналізу:

- декан факультету математики та інформатики, доктор фізико-математичних наук, професор Шарин С.В.;
- завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Загороднюк А.В.;
- старший лаборант кафедри математичного і функціонального аналізу Василик О.Я.;
- професор кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Дмитришин Р.І.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Кравців В.В.;
- професор кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, професор Осипчук М. М.;
- професор кафедри математичного і функціонального аналізу, доктор фізико-математичних наук, доцент Васишин Т. В.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Малицька Г.П.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Івасюк І.Я. ;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Марцінків М.В.;
- доцент кафедри математичного і функціонального аналізу, кандидат фізико-математичних наук, доцент Соломко А.В.;

з інших кафедр Карпатського національного університету імені Василя Стефаника:

- завідувач кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики, доктор фізико-математичних наук, професор Дмитришин М.І.;
- доцент кафедри диференціальних рівнянь і прикладної математики, кандидат фізико-математичних наук, доцент Гой Т.П.;

Запрошені з інших установ:

- завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення Хмельницького національного університету, доктор фізико-математичних наук, професор Бедратюк Л.П.

З присутніх – 7 докторів наук та 6 кандидатів наук – фахівці за профілем представленої дисертації.

Головуючий на фаховому семінарі – доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету математики та інформатики Шарин С.В.

СЛУХАЛИ:

1. Інформацію про дисертацію та здобувачку.

Дисертантка Самарук Наталія Миколаївна, заочної форми навчання в аспірантурі за спеціальністю 111 Математика. Дисертація на тему «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи», подана на здобуття наукового ступеня доктора філософії з галузі знань 11 Математика та статистика за спеціальністю 111 Математика.

Тема дисертаційної «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи» затверджена на засіданні Вченої ради Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника (протокол № 9 від 26. 10. 2021 року).

Науковими керівниками затверджені: доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення Хмельницького національного університету Бедратюк Леонід Петрович; кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Карпатського національного університету імені Василя Стефаника Кравців Вікторія Василівна.

2. Виступ здобувачки Самарук Наталії Миколаївни.

Актуальність теми. Аналіз та розпізнавання 2D і 3D-зображень є однією з ключових задач сучасної обробки даних, машинного навчання та комп'ютерного зору. Для розпізнавання, класифікації та виділення об'єктів на зображеннях за допомогою методів машинного навчання необхідно знаходити ознаки, що залишаються інваріантними до геометричних перетворень обертань, паралельних перенесень, масштабувань, які не спотворюють сцену зображення.

У задачах аналізу зображень зображення ототожнюється з кусково-неперервною дійсною функцією $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що визначена на компактній області Ω та має скінченний ненульовий інтеграл.

Для коректного розпізнавання необхідні ознаки, інваріантні до дії груп геометричних перетворень: обертань, паралельних перенесень та

масштабувань. Класичним математичним інструментом побудови таких ознак моментні інваріанти, започатковані в роботах М-Р. Ну.

Загальним π -моментом зображення порядку $m+n$ називається величина:

$$m_{m,n}f(x,y) = \iint_{\Omega} f(x,y) \pi_{m,n}(x,y) dx dy.$$

де $\pi_{m,n}(x,y)$ – базис векторного простору P_2 многочленів від двох змінних. Залежно від вибору базису в просторі многочленів $\pi_{m,n}(x,y)$, розглядаються різні системи моментів.

У найпростішому випадку, коли $\pi_{m,n}(x,y) = x^m y^n$, такі моменти називаються геометричними моментами. Афінна група площини та її підгрупи природно діють на геометричні моменти і виникають відповідні алгебри моментних інваріантів. Вони стали основою побудови інваріантних ознак відносно паралельних перенесень, масштабувань і обертань. Алгебра відповідних моментних інваріантів добре вивчена та має явний опис породжуючих елементів.

Проте геометричні моменти мають низку недоліків. Вони характеризуються обчислювальною нестабільністю у дискретних областях, оскільки степені $x^m y^n$ швидко зростають при збільшенні розміру зображень, що призводить до накопичення обчислювальних похибок.

Альтернативним підходом для уникнення обчислювальної нестабільності замість геометричних моментів є використання ортогональних моментів (Зерніке, Ерміта, Лежандра) або неортогональних базисів в просторі многочленів, які вже обчислювально стабільні.

Однак при цьому виникає проблема обчислення моментних інваріантів у новому базисі, оскільки зміна базису нашоується на технічні труднощі і була розв'язана лише для моментів Лежандра, причому для простих перетворень площини, які не включають повороти (Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R.).

Проблеми чисельної нестабільності геометричних моментів та складність побудови інваріантів у нових базисах зумовлюють потребу в таких системах многочленів, які поєднують обчислювальну стійкість із збереженням структури моментних інваріантів.

Ідея полягає у заміні мономів $x^m y^n$ на поліноміальні базиси $\pi_{m,n}(x,y)$, які при дії груп геометричних перетворень трансформуються аналогічно до геометричних моментів $x^m y^n$; є обчислювально стабільними; дозволяють будувати інваріанти за класичною схемою.

Ключовим стало відкриття авторів (Yang B., Li G., Zhang H., Dai M.), які встановили, що для базису $\pi_{m,n}(x,y) = H_m(x)H_n(y)$, де $H_m(x), H_n(y)$ – класичні многочлени Ерміта, форма моментних інваріантів відносно дії групи $SO(2)$ збігається з формою геометричних моментів.

Подальший розвиток цієї ідеї Я.-Флюссером, Л.-Бедратюком, Т.-Саком, Я.-Костковою, Я.-Кауцьким призвів до повного опису всіх многочленів, які зберігають структуру моментних інваріантів при зміні базису. Цю властивість названо квазі-мономіальністю. Квазі-мономіальні

многочлени (далі – квазі-мономи) узагальнюють класичний підхід моментної теорії, зберігаючи інваріантну структуру та забезпечуючи чисельну стабільність обчислень.

Знання квазі-мономів для підгруп афінних груп перетворень площини й простору є важливим для побудови швидких і стійких алгоритмів обчислення моментних інваріантів 2D і 3D-зображень. У зв'язку з цим актуальним є дослідження квазі-мономів відносно різних підгруп афінних груп перетворень площини та простору та встановлення їхніх властивостей.

Об'єкт дослідження: експоненціальні породжуючі функції та визначені ними сім'ї многочленів від двох і трьох змінних, що виникають при дії підгруп афінних груп площини та простору.

Предмет дослідження: мови й закономірності, за яких експоненціальні породжуючі функції породжують квазі-мономіальні сім'ї, зокрема їхній функціональний вигляд, диференціальні критерії квазі-мономіальності та породжувані рекурентні співвідношення.

Мета дослідження: опис спеціальних функцій, які є квазі-мономами відносно підгруп афінної групи площини та простору.

Завдання дослідження:

- описати квазі-мономіальні многочлени відносно підгруп афінної групи площини – зокрема, підгруп обертань, масштабувань, паралельних перенесень та їхніх композицій;

- побудувати породжуючі функції для квазі-мономіальних многочленів відносно підгруп афінної групи простору, а також визначити їх явний вигляд і вивести рекурентні співвідношення;

- дослідити квазі-мономіальні многочлени для підгрупи обертань простору через многочлени Аппеля, зокрема, показати, що ці многочлени є квазі-мономіальними многочленами, отримати їх явний вигляд, скласти відповідні рекурентні співвідношення;

- сформулювати умови, за яких задана експоненціальна породжуюча функція породжує систему квазі-мономіальних многочленів відносно відповідної підгрупи афінної групи площини або простору.

Методи дослідження: методи комбінаторики та диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Структура дисертації. Структура роботи охоплює вступ, чотири розділи, загальні висновки, список літератури, що містить 49 джерел, та 5 додатків.

У вступі окреслено мету дисертації, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано об'єкт, предмет, завдання, наведено інформацію про наукову новизну, методи дослідження й апробацію результатів.

У першому розділі «Огляд літератури, вибір методів дослідження та допоміжні результати» здійснено теоретичний аналіз стану сучасних досліджень у галузі моментної інваріантності та методів аналізу зображень за допомогою поліноміальних базисів, здійснено вибір методів дослідження та наведено допоміжні результати.

У другому розділі «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини» наведено визначення та основні результати щодо всіх сімей

многочленів, які є квазі-мономіальними відносно підгруп афінної групи площини $\text{Aff}(2)$: обертань, групи паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень, масштабувань, рівномірних масштабувань. Сформульовано критерії квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій G :

- для групи обертань $\text{SO}(2)$ функція залежить від аргументів $ix+vy$, x^2+y^2 та u^2+v^2 ;

- для групи масштабувань – від xu та uv ;

- для групи рівномірних масштабувань – від $\frac{y}{x}$, ix та vx ;

- для групи паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(u, v) e^{xu+yv}$, де $C(u, v)$ – деякий степеневий ряд;

- для групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(x - y, u, v) e^{xu+yv}$, де $C(x - y, u, v)$ – степеневий ряд.

Також у цьому розділі встановлено умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності. Доведено, що для групи паралельних перенесень сім'я $\tilde{B}_{m,n}(x, y) = \alpha_{m,n} \cdot B_{m,n}(x, y)$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\alpha_{m,n}$ визначається функцією φ , що задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m + n) = \varphi(m + n - 1).$$

У третьому розділі «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору» наведено опис всіх сімей многочленів, які є квазі-мономіальними відносно підгруп (масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень та рівномірних паралельних перенесень) афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. Встановлено необхідні й достатні умови квазі-мономіальності для підгруп паралельних перенесень, масштабувань та їхніх рівномірних аналогів. Зокрема, доведено, що для:

- групи паралельних перенесень у 3D породжуюча функція набуває вигляду $G = C(u, v, w) e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд;

- групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція набуває вигляду $G = C(x - y, x - z, u, v) e^{xu+yv}$, де $C(x - y, x - z, u, v)$ – довільний степеневий ряд;

- групи масштабувань функція G залежить від змінних xu, uv, zw ;

- групи рівномірних масштабувань – від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ix, vx, wx$.

Крім того, у цьому розділі встановлено умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності. Доведено, що для групи паралельних перенесень сім'я $\tilde{B}_{m,n,k}(x, y, z) = \alpha_{m,n,k} \cdot B_{m,n,k}(x, y, z)$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\alpha_{m,n,k}$ визначається функцією φ , що задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m + n + k) = \varphi(m + n + k - 1).$$

У четвертому розділі « $\text{SO}(3)$ -квазі-мономіальні сім'ї» пропонується опис, подібний до 2D випадку, сім'ї многочленів, яка є квазі-мономіальною відносно групи обертань простору. Ключовим результатом роботи є встановлення необхідних і достатніх умов квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій. Зокрема, доведено, що сім'я

многочленів є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція виражається через змінні (у випадку $SO(3)$: $ix+vy+wz$, $x^2+y^2+z^2$, $u^2+v^2+w^2$). Такий підхід забезпечує повний опис відповідних класів многочленів. Встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає квазі-мономіальну властивість. Крім того, в розділі показано, що біортогональні поліноми Аппеля від трьох змінних утворюють приклад $SO(3)$ -квазі-мономіальної сім'ї, та наведено для них рекурентні співвідношення.

В дисертації зроблено наступні висновки:

Дисертаційна робота присвячена вивченню квазі-мономіальних многочленів підгруп афінної групи. У роботі отримано такі наукові результати:

1. Розвинено концепцію квазі-мономіальності для підгруп афінних перетворень. Ключовою особливістю квазі-мономіальних базисів $B_{m,n,[k]}(x, y, [z])$ є ідентичність матричної реалізації операторів відповідних груп перетворень тій формі, яку вони мають у стандартному мономіальному базисі $x^m y^n$.

2. Здійснено повний опис квазі-мономіальних сімей відносно основних підгруп групи $Aff(2)$. Сформульовано критерії квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій G :

- для групи обертань $SO(2)$ функція залежить від аргументів $ix+vy$, x^2+y^2 та u^2+v^2 ;

- для групи масштабувань – від xu та uv ;

- для групи рівномірних масштабувань – від $\frac{y}{x}$, ix та vx ;

- для групи паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(u, v) e^{xu+uv}$, де $C(u, v)$ – деякий степеневий ряд;

- для групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(x - y, u, v) e^{xu+uv}$, де $C(x - y, u, v)$ – степеневий ряд.

3. Досліджено просторові квазі-мономіальні сім'ї від трьох змінних відносно підгруп афінної групи простору $Aff(3)$. Встановлено необхідні й достатні умови квазі-мономіальності для підгруп паралельних перенесень, масштабувань та їхніх рівномірних аналогів. Зокрема, доведено, що для:

- групи паралельних перенесень у 3D породжуюча функція набуває вигляду $G = C(u, v, w) e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд;

- групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція набуває вигляду $G = C(x - y, x - z, u, v) e^{xu+uv}$, де $C(x - y, x - z, u, v)$ – довільний степеневий ряд;

- групи масштабувань функція G залежить від змінних xu , uv , zw ;

- групи рівномірних масштабувань – від змінних $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, ix , vx , wx .

4. Описано сім'ї многочленів, що є квазі-мономами відносно групи обертань простору $SO(3)$. Доведено, що для забезпечення $SO(3)$ -квазі-мономіальності експоненціальна породжуюча функція G має залежати від $ix+vy+wz$, $x^2+y^2+z^2$ та $u^2+v^2+w^2$.

5. Виявлено умови збереження властивості квазі-мономіальності при нормалізації многочленів. Доведено, що для групи паралельних перенесень

сім'я $\tilde{B}_{m,n,[k]}(x, y, [z]) = \alpha_{m,n,[k]} \cdot B_{m,n,[k]}(x, y, [z])$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\alpha_{m,n,[k]}$ визначається функцією φ , що задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m + n + [k]) = \varphi(m + n + [k] - 1).$$

6. Доведено, що біортогональні многочлени Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами $SO(3)$. Виведено рекурентні співвідношення для цих многочленів.

7. Розроблено апарат рекурентних співвідношень для обчислення значень квазі-мономіальних многочленів високих порядків. Для узагальнених многочленів відносно групи паралельних перенесень виведено схеми, що використовують комбінаторні коефіцієнти $h_{s,k}^{(m,n)}$. Застосування цих схем замість прямих обчислень через степеневі суми підвищує чисельну стійкість алгоритмів, запобігаючи втраті точності при роботі з об'ємними даними.

Отримані результати поглиблюють теоретичні уявлення про квазі-мономи та розширюють можливості їх застосування в задачах аналізу зображень. Розроблені методи забезпечують побудову інваріантних ознак до афінних і ортогональних перетворень, що сприяє підвищенню ефективності обробки даних. Виявлені властивості мають наукову цінність у теорії груп та теорії спеціальних функцій і можуть бути використані для подальших досліджень у цих галузях.

У роботі вперше отримано наступні результати:

- Запроваджено поняття сімей квазі-мономіальних многочленів відносно підгруп афінних груп перетворень площини $Aff(2)$ та простору $Aff(3)$.

- Отримано повний опис у термінах експоненціальних породжуючих функцій сімей квазі-мономів відносно таких підгруп афінних груп площини та простору: обертань, масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень.

- Побудовано явний приклад квазі-мономів відносно підгрупи паралельних перенесень площини, та встановлено рекурентні співвідношення для цієї сім'ї.

- Досліджено умови нормалізації, за яких зберігається квазі-мономіальність многочленів відносно групи паралельних перенесень площини та простору, а також відносно групи обертань простору.

- Доведено, що дві сім'ї біортогональних многочленів Аппеля від трьох змінних є квазі-мономіальними відносно групи обертань простору, та знайдено рекурентні співвідношення для цих сімей.

Теоретичне та практичне значення дослідження.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, мають як теоретичне, так і прикладне значення. Вони можуть бути використані для розвитку алгоритмів машинного навчання, орієнтованих на розпізнавання та класифікацію зображень, що залишаються інваріантними до геометричних перетворень площини або простору.

Зокрема, застосування квазі-мономіальних базисів у глибоких нейронних мережах сприяє побудові обертально інваріантних архітектур, що

дає змогу підвищити точність та робастність систем розпізнавання і зменшити обсяг необхідних аугментованих даних.

Отримані результати є важливими й актуальними як для теорії розпізнавання образів та аналізу зображень, так і для комбінаторики, теорії груп і теорії спеціальних функцій.

3. Запитання до здобувачки по темі дисертації:

1) Доктор фізико-математичних наук, професор Загороднюк А.В.:

Чи розглядається можливість розширення дослідження на інші типи симетрій та груп, наприклад, на афінні перетворення або гіперболічні обертання?

Відповідь. Основна увага у дисертації приділяється евклідовим перетворенням, зокрема обертанням, масштабуванням та паралельним перенесенням. Однак можливість розширення на інші групи, такі як афінні або гіперболічні, є природним напрямком для подальших досліджень. Афінні перетворення, наприклад, містять як обертання, так і паралельні перенесення та масштабування, тому вони можуть бути використані для узагальнення результатів, отриманих для евклідових груп.

Дослідження гіперболічних обертань не розглядалося у дисертації, але у подальших дослідженнях могло б розкрити нові властивості квазі-мономіальних поліномів у неевклідових просторах, що може бути корисним для задач у спеціальній та загальній теорії відносності.

2) Доктор фізико-математичних наук, професор Дмитришин Р. І.:

У чому полягає основна ідея поняття квазімономів і чим вони відрізняються від звичайних мономів?

Відповідь. Основна ідея квазімономів полягає в тому, що вони є базисом простору многочленів, який при діях певної групи перетворень (наприклад, поворотів чи зсувів) трансформується за тими ж алгебраїчними законами, що й стандартний мономіальний базис. Ключова властивість: матриця лінійного оператора перетворення у квазі-мономіальному базисі є ідентичною матрицею цього ж оператора в базисі стандартних мономів. Це дозволяє використовувати класичні формули інваріантів, розроблені для мономів, безпосередньо для нових, більш стабільних базисів. На відміну від звичайних мономів, які є просто степенями змінних, квазімономи можуть мати складнішу структуру (наприклад, базуватися на многочленах Ерміта чи Аппеля), що забезпечує їм кращу чисельну стабільність при обчисленнях.

3) кандидат фізико-математичних наук, доцент Гой А.П.:

Який зв'язок між побудованими вами квазі-мономіальними сім'ями та многочленами Аппеля? Чому саме ці многочлени виникають у випадку групи обертань простору?

Відповідь. У дисертації встановлено, що окремі побудовані квазі-мономіальні сім'ї є біортогональними многочленами Аппеля від трьох змінних, інваріантними відносно дії групи обертань простору. Многочлени Аппеля виступають природним прототипом квазі-мономіальних систем завдяки своїй диференціальній властивості, яка узагальнює властивості степеневих функцій і узгоджується з дією інфінітезимальних операторів групи.

Їх поява у випадку групи обертань $SO(3)$ зумовлена тим, що генератори цієї групи задаються диференціальними операторами першого порядку, а умова інваріантності приводить до класу функцій, замкнених відносно диференціювання. Саме тому природно виникають системи типу Аппеля або їх узагальнення, які зберігають квазі-мономіальну структуру при дії обертань.

До доповіді було задано 3 запитання, на які здобувачка дала правильні та ґрунтовні відповіді.

4. Виступ наукових керівників Науковий керівник, д. ф. – м. н., проф. Бедратюк Л.П. відзначив, що аспірантка Самарук Наталія Миколаївна вчасно виконувала всі розділи індивідуального плану наукової роботи в установлені терміни. Своєчасність та повнота виконання індивідуального плану аспірантки підтверджена результатами піврічної, проміжної, підсумкової (річної) та заключної атестацій.

Бедратюк Л.П. зазначив, що дисертація Самарук Наталії Миколаївни на тему «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи» повністю відповідає вимогам Постанови Кабінету Міністрів України «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами) та Вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом МОН України від 12.01.2017 р. № 40 (зі змінами), та може бути представлена до захисту в разовій спеціалізованій вченій раді.

Науковий керівник, канд. ф. – м. н., доц. Кравців В.В. відзначила, що аспірантка Самарук Наталія Миколаївна самостійно отримала усі результати дисертаційного дослідження. Робота дисертантки Самарук Наталії Миколаївни пройшла перевірку на антиплагіат, яка показала відповідність роботи загальноприйнятим стандартам. За матеріалами дисертації опубліковано 1 фахова стаття, 2 статті у виданнях, проіндексованих у базах даних Scopus, 5 тез доповідей у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій.

5. Виступи присутніх членів семінару з оцінкою дисертації.

Д. ф.-м. н., проф. Шарин С. В.:

Дисертаційна робота Самарук Н.М. насичена значною кількістю нових та цікавих результатів. Тема роботи є актуальною, а її результати науково обґрунтованими і мають істотне значення для теорії спеціальних функцій. Загалом робота повністю відповідає всім вимогам та підлягає допуску до захисту.

К. ф.-м. н., доц. Малицька Г.П.:

Самарук Н.М. опублікувала свої наукові результати в 3 статтях та 5 тезах доповідей у матеріалах міжнародних та всеукраїнських наукових конференцій. Робота має важливе наукове теоретичне і практичне значення. Вважаю, що робота є комплексною та може бути допущена до розгляду в разовій спеціалізованій вченій раді.

Д. ф.-м. н., проф. Дмитришин Р.І.:

Робота Самарук Н.М. є комплексною. Дисертантці вдалося розв'язати важливі теоретичні задачі встановити умови квазі-мономіальності сімей многочленів, показати практичне застосування отриманих теоретичних наробок. Робота опублікована в наукових журналах високого рівня, тому я вважаю, що Самарук Н.М. заслуговує на те, щоб представити свою роботу на захисті в разовій спеціалізованій вченій раді.

6. В обговоренні дисертаційної роботи взяли участь: д. ф. – м. н., проф. Дмитришин Р. І., д. ф. – м. н., проф. Загороднюк А.В., д. ф. – м. н., проф. Васишин Т.В., д. ф. – м. н., проф. Шарин С. В., д. ф. – м. н., проф. Дмитришин М. І., к. ф. – м. н., доц. Марцінків М. В.

Заслухавши публічну презентацію наукових результатів дисертації Самарук Наталії Миколаївни та обговоривши її на фаховому семінарі кафедри математичного і функціонального аналізу прийнято наступні висновки щодо дисертації: рекомендувати для подання до розгляду та захисту в разовій спеціалізованій вченій раді.

7. Висновок про перевірку дисертацій та наукових публікацій здобувачів на виявлення порушення академічної доброчесності з наданням (до витягу додається довідка за підписом проректора з наукової роботи університету).

УХВАЛИЛИ:

ПРИЙНЯТИ такий висновок про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів дисертації Самарук Наталії Миколаївни на тему «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи» зі спеціальності 111 «Математика».

Висновок
наукового фахового семінару
кафедри математичного і функціонального аналізу
факультету математики та інформатики
Карпатського національного університету імені Василя Стефаника
про наукову новизну, теоретичне та практичне значення результатів
дисертації «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи»
здобувача ступеня доктора філософії
Самарук Наталії Миколаївни
за спеціальністю 111 Математика
(галузь знань 11 Математика та статистика)

1. Актуальність теми. Аналіз та розпізнавання 2D і 3D-зображень є однією з ключових задач сучасної обробки даних, машинного навчання та комп'ютерного зору. Для розпізнавання, класифікації та виділення об'єктів на зображеннях за допомогою методів машинного навчання необхідно знаходити ознаки, що залишаються інваріантними до геометричних

перетворень обертань, паралельних перенесень, масштабувань, які не спотворюють сцену зображення.

У задачах аналізу зображень зображення ототожнюється з кусково-неперервною дійсною функцією $f: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, що визначена на компактній області Ω та має скінченний ненульовий інтеграл.

Для коректного розпізнавання необхідні ознаки, інваріантні до дії груп геометричних перетворень: обертань, паралельних перенесень та масштабувань. Класичним математичним інструментом побудови таких ознак є моментні інваріанти, започатковані в роботах М-Р. Ну.

Загальним π -моментом зображення порядку $m+n$ називається величина:

$$m_{m,n}f(x,y) = \iint_{\Omega} f(x,y) \pi_{m,n}(x,y) dx dy.$$

де $\pi_{m,n}(x,y)$ – базис векторного простору P_2 многочленів від двох змінних. Залежно від вибору базису в просторі многочленів $\pi_{m,n}(x,y)$, розглядаються різні системи моментів.

У найпростішому випадку, коли $\pi_{m,n}(x,y) = x^m y^n$, такі моменти називаються геометричними моментами. Афінна група площини та її підгрупи природно діють на геометричні моменти і виникають відповідні алгебри моментних інваріантів. Вони стали основою побудови інваріантних ознак відносно паралельних перенесень, масштабувань і обертань. Алгебра відповідних моментних інваріантів добре вивчена та має явний опис породжуючих елементів.

Проте геометричні моменти мають низку недоліків. Вони характеризуються обчислювальною нестабільністю у дискретних областях, оскільки степені $x^m y^n$ швидко зростають при збільшенні розміру зображень, що призводить до накопичення обчислювальних похибок.

Альтернативним підходом для уникнення обчислювальної нестабільності замість геометричних моментів є використання ортогональних моментів (Зерніке, Ерміта, Лежандра) або неортогональних базисів в просторі многочленів, які вже обчислювально стабільні.

Однак при цьому виникає проблема обчислення моментних інваріантів у новому базисі, оскільки зміна базису наштовхується на технічні труднощі і була розв'язана лише для моментів Лежандра, причому для простих перетворень площини, які не включають повороти (Chong C.-W., Raveendran P., Mukundan R.).

Проблеми чисельної нестабільності геометричних моментів та складність побудови інваріантів у нових базисах зумовлюють потребу в таких системах многочленів, які поєднують обчислювальну стійкість із збереженням структури моментних інваріантів.

Ідея полягає у заміні мономів $x^m y^n$ на поліноміальні базиси $\pi_{m,n}(x,y)$, які при дії груп геометричних перетворень трансформуються аналогічно до геометричних моментів $x^m y^n$; є обчислювально стабільними; дозволяють будувати інваріанти за класичною схемою.

Ключовим стало відкриття авторів (Yang B., Li G., Zhang H., Dai M.), які встановили, що для базису $\pi_{m,n}(x,y) = H_m(x)H_n(y)$, де $H_m(x), H_n(y)$ – класичні многочлени Ерміта, форма моментних інваріантів відносно дії групи $SO(2)$ збігається з формою геометричних моментів.

Подальший розвиток цієї ідеї Я.~Флюссером, Л.~Бедратюком, Т.~Саком, Я.~Костковою, Я.~Кауцьким призвів до повного опису всіх многочленів, які зберігають структуру моментних інваріантів при зміні базису. Цю властивість названо квазі-мономіальністю. Квазі-мономіальні многочлени (далі – квазі-мономи) узагальнюють класичний підхід моментної теорії, зберігаючи інваріантну структуру та забезпечуючи чисельну стабільність обчислень.

Знання квазі-мономів для підгруп афінних груп перетворень площини й простору є важливим для побудови швидких і стійких алгоритмів обчислення моментних інваріантів 2D і 3D-зображень. У зв'язку з цим актуальним є дослідження квазі-мономів відносно різних підгруп афінних груп перетворень площини та простору та встановлення їхніх властивостей.

2. Особистий внесок здобувача в отриманні наукових результатів. Усі результати дисертації, що виносяться на захист, отримано авторкою самостійно.

3. Структура дисертації. Структура роботи охоплює вступ, чотири розділи, загальні висновки, список літератури, що містить 49 джерел, та 5 додатків.

У вступі окреслено мету дисертації, обґрунтовано актуальність теми, сформульовано об'єкт, предмет, завдання, наведено інформацію про наукову новизну, методи дослідження й апробацію результатів.

У першому розділі «Огляд літератури, вибір методів дослідження та допоміжні результати» здійснено теоретичний аналіз стану сучасних досліджень у галузі моментної інваріантності та методів аналізу зображень за допомогою поліноміальних базисів, здійснено вибір методів дослідження та наведено допоміжні результати.

У другому розділі «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини» наведено визначення та основні результати щодо всіх сімей многочленів, які є квазі-мономіальними відносно підгруп афінної групи площини $Aff(2)$: обертань, групи паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень, масштабувань, рівномірних масштабувань. Сформульовано критерії квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій G :

- для групи обертань $SO(2)$ функція залежить від аргументів $ix+vy$, x^2+y^2 та u^2+v^2 ;

- для групи масштабувань – від xi та uv ;

- для групи рівномірних масштабувань – від $\frac{y}{x}$, ix та vx ;

- для групи паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(u,v) e^{xu+yv}$, де $C(u,v)$ – деякий степеневий ряд;

- для групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(x-y, u,v) e^{xu+yv}$, де $C(x-y, u,v)$ – степеневий ряд.

Також у цьому розділі встановлено умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності. Доведено, що для групи паралельних перенесень сім'я $\tilde{B}_{m,n}(x,y) = \alpha_{m,n} \cdot B_{m,n}(x,y)$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\alpha_{m,n}$ визначається функцією φ , що задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m+n) = \varphi(m+n-1).$$

У третьому розділі «Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору» наведено опис всіх сімей многочленів, які є квазі-мономіальними відносно підгруп (масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень та рівномірних паралельних перенесень) афінної групи простору $\text{Aff}(3)$. Встановлено необхідні й достатні умови квазі-мономіальності для підгруп паралельних перенесень, масштабувань та їхніх рівномірних аналогів. Зокрема, доведено, що для:

- групи паралельних перенесень у 3D породжуюча функція набуває вигляду $G = C(u, v, w) e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд;
- групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція набуває вигляду $G = C(x-y, x-z, u, v) e^{xu+yv}$, де $C(x-y, x-z, u, v)$ – довільний степеневий ряд;
- групи масштабувань функція G залежить від змінних xu, uv, zw ;
- групи рівномірних масштабувань – від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ux, vx, wx$.

Крім того, у цьому розділі встановлено умови, за яких нормування квазі-мономів зберігає властивість квазі-мономіальності. Доведено, що для групи паралельних перенесень сім'я $\tilde{B}_{m,n,k}(x,y,z) = \alpha_{m,n,k} \cdot B_{m,n,k}(x,y,z)$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\alpha_{m,n,k}$ визначається функцією φ , що задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m+n+k) = \varphi(m+n+k-1).$$

У четвертому розділі «SO(3)-квазі-мономіальні сім'ї» пропонується опис, подібний до 2D випадку, сім'ї многочленів, яка є квазі-мономіальною відносно групи обертань простору. Ключовим результатом роботи є встановлення необхідних і достатніх умов квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій. Зокрема, доведено, що сім'я многочленів є квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли її експоненціальна породжуюча функція виражається через змінні (у випадку SO(3): $ux+vy+wz, x^2+y^2+z^2, u^2+v^2+w^2$). Такий підхід забезпечує повний опис відповідних класів многочленів. Встановлено умови, за яких нормалізація квазі-мономів зберігає квазі-мономіальну властивість. Крім того, в розділі показано, що біортогональні поліноми Аппеля від трьох змінних утворюють приклад SO(3)-квазі-мономіальної сім'ї, та наведено для них рекурентні співвідношення.

4. Загальні висновки. Дисертаційна робота присвячена вивченню квазі-мономіальних многочленів підгруп афінної групи.

У роботі отримано такі наукові результати:

1. Розвинено концепцію квазі-мономіальності для підгруп афінних перетворень. Ключовою особливістю квазі-мономіальних базисів

$V_{m,n,[k]}(x, y, [z])$ є ідентичність матричної реалізації операторів відповідних груп перетворень тієї форми, яку вони мають у стандартному мономіальному базисі $x^m y^n$.

2. Здійснено повний опис квазі-мономіальних сімей відносно основних підгруп групи $Aff(2)$. Сформульовано критерії квазі-мономіальності у термінах експоненціальних породжуючих функцій G :

- для групи обертань $SO(2)$ функція залежить від аргументів $ix+vy$, x^2+y^2 та u^2+v^2 ;

- для групи масштабувань – від xu та uv ;

- для групи рівномірних масштабувань – від $\frac{y}{x}$, ix та vx ;

- для групи паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(u, v) e^{xu+yv}$, де $C(u, v)$ – деякий степеневий ряд;

- для групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція має вигляд $G = C(x - y, u, v) e^{xu+yv}$, де $C(x - y, u, v)$ – степеневий ряд.

3. Досліджено просторові квазі-мономіальні сім'ї від трьох змінних відносно підгруп афінної групи простору $Aff(3)$. Встановлено необхідні й достатні умови квазі-мономіальності для підгруп паралельних перенесень, масштабувань та їхніх рівномірних аналогів. Зокрема, доведено, що для:

- групи паралельних перенесень у 3D породжуюча функція набуває вигляду $G = C(u, v, w) e^{xu+yv+zw}$, де $C(u, v, w)$ – довільний степеневий ряд;

- групи рівномірних паралельних перенесень породжуюча функція набуває вигляду $G = C(x - y, x - z, u, v) e^{xu+yv}$, де $C(x - y, x - z, u, v)$ – довільний степеневий ряд;

- групи масштабувань функція G залежить від змінних xu, uv, zw ;

- групи рівномірних масштабувань – від змінних $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, ix, vx, wx$.

4. Описано сім'ї многочленів, що є квазі-мономами відносно групи обертань простору $SO(3)$. Доведено, що для забезпечення $SO(3)$ -квазі-мономіальності експоненціальна породжуюча функція G має залежати від $ix+vy+wz, x^2+y^2+z^2$ та $u^2+v^2+w^2$.

5. Виявлено умови збереження властивості квазі-мономіальності при нормалізації многочленів. Доведено, що для групи паралельних перенесень сім'я $\tilde{V}_{m,n,[k]}(x, y, [z]) = \alpha_{m,n,[k]} \cdot V_{m,n,[k]}(x, y, [z])$ залишається квазі-мономіальною тоді і тільки тоді, коли послідовність коефіцієнтів $\alpha_{m,n,[k]}$ визначається функцією φ , що задовольняє рекурентне співвідношення:

$$\varphi(m + n + [k]) = \varphi(m + n + [k] - 1).$$

6. Доведено, що біортогональні многочлени Аппеля від трьох змінних є квазі-мономами $SO(3)$. Виведено рекурентні співвідношення для цих многочленів.

7. Розроблено апарат рекурентних співвідношень для обчислення значень квазі-мономіальних многочленів високих порядків. Для узагальнених многочленів відносно групи паралельних перенесень виведено схеми, що використовують комбінаторні коефіцієнти $h_{s,k}^{(m,n)}$. Застосування цих схем замість прямих обчислень через степеневі суми підвищує чисельну стійкість алгоритмів, запобігаючи втраті точності при роботі з об'ємними даними.

Отримані результати поглиблюють теоретичні уявлення про квазі-мономи та розширюють можливості їх застосування в задачах аналізу зображень. Розроблені методи забезпечують побудову інваріантних ознак до афінних і ортогональних перетворень, що сприяє підвищенню ефективності обробки даних. Виявлені властивості мають наукову цінність у теорії груп та теорії спеціальних функцій і можуть бути використані для подальших досліджень у цих галузях.

5. Наукова новизна отриманих результатів.

Усі результати дисертаційної роботи є новими. У роботі вперше:

- Запроваджено поняття сімей квазі-мономіальних многочленів відносно підгруп афінних груп перетворень площини $\text{Aff}(2)$ та простору $\text{Aff}(3)$.

- Отримано повний опис у термінах експоненціальних породжуючих функцій сімей квазі-мономів відносно таких підгруп афінних груп площини та простору: обертань, масштабувань, рівномірних масштабувань, паралельних перенесень, рівномірних паралельних перенесень.

- Побудовано явний приклад квазі-мономів відносно підгрупи паралельних перенесень площини, та встановлено рекурентні співвідношення для цієї сім'ї.

- Досліджено умови нормалізації, за яких зберігається квазі-мономіальність многочленів відносно групи паралельних перенесень площини та простору, а також відносно групи обертань простору.

- Доведено, що дві сім'ї біортогональних многочленів Апеля від трьох змінних є квазі-мономіальними відносно групи обертань простору, та знайдено рекурентні співвідношення для цих сімей.

6. Теоретичне та практичне значення дослідження.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, мають як теоретичне, так і прикладне значення. Вони можуть бути використані для розвитку алгоритмів машинного навчання, орієнтованих на розпізнавання та класифікацію зображень, що залишаються інваріантними до геометричних перетворень площини або простору.

Зокрема, застосування квазі-мономіальних базисів у глибоких нейронних мережах сприяє побудові обертально інваріантних архітектур, що дає змогу підвищити точність та робастність систем розпізнавання і зменшити обсяг необхідних аугментованих даних.

Отримані результати є важливими й актуальними як для теорії розпізнавання образів та аналізу зображень, так і для комбінаторики, теорії груп і теорії спеціальних функцій.

7. Особиста участь автора – одержання наукових та практичних результатів, що викладені в дисертаційній роботі. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного і функціонального аналізу Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.

Наукові керівники: доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення Хмельницького національного університету Бедратюк Леонід Петрович; кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного і функціонального

аналізу Карпатського національного університету імені Василя Стефаника Кравців Вікторія Василівна.

Робота є результатом самостійних досліджень Самарук Наталії Миколаївни.

8. Перелік публікацій за темою дисертації.

За результатами досліджень опубліковано 8 наукових праць, у тому числі:

- 2 статті у періодичних виданнях, які індексуються у базі даних Scopus;

- 1 стаття у науковому фаховому виданні України (категорії Б);

- 5 тез доповідей в збірниках матеріалів конференцій.

Статті в наукових фахових виданнях України:

1. Самарук Н.М. Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи простору // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». – 2023. – Т. 42. – № 1. – С. 79-89.

DOI: [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42\(1\).79-89](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.42(1).79-89)

URL: <http://visnyk-math.uzhnu.edu.ua/issue/view/16001>

Статті у періодичних виданнях, включених до наукометричної бази SCOPUS:

2. Samaruk N. M. Quasi-monomials with respect to subgroups of the plane affine group // Matematychni studii. – 2023. – Vol. 59. № 1. – P. 3-11.

DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.59.1.3-11>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85163287621>

3. Samaruk N.M. $SO(3)$ quasi-monomial polynomial families // Carpathian Math Publ. – 2024. – Vol. 16. № 1–P. 40-52.

DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.16.1.40-52>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85199423386>

Публікації за матеріалами конференцій:

4. Samaruk N.M. Quasi-monomials with respect to rotation and translation subgroups of affine plane group // The International online conference «Current trends in abstract and applied analysis» (Ivano-Frankivsk, Ukraine, 12-15 May 2022): book of abstracts. – Ivano-Frankivsk, 2022. – P. 68.

URL: <https://conference.pu.if.ua/cta/BookOfAbstracts.pdf>

5. Самарук Н.М. Квазі-мономи відносно підгруп афінної групи площини // Міжнародна алгебраїчна конференція «Під кінець року 2022» (Київ, Україна, 27-28 грудня 2022 р.): тези доповідей. – Київ, 2022. – С.70.

URL: <https://www.imath.kiev.ua/~algebra/algebra2022/abstracts>

6. Samaruk N. 3D quasi-monomials // Ukraine Algebra Conference «At the End of the Year 2023» (Kyiv, Ukraine, 26-27 December 2023): book of abstracts. – Kyiv, 2023. – P. 49.

URL: https://drive.google.com/file/d/1F2OyRq50ktbiRHgna_n509RnfFPp_VZ4/view

7. Самарук Н. Квазі-мономи відносно групи паралельних перенесень простору та групи поворотів простору $SO(3)$ // Міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана (Чернівці, 23-27 вересня 2024 р.): тези доповідей. – Чернівці, 2024. – С. 94-95.

URL: <https://hahn.chnu.edu.ua/media/odbldmui/book-of-abstracts.pdf>

8. Samaruk N. $SO(3)$ -quasi-monomial families of Appell polynomials // The 15th Ukraine Algebra Conference (Lviv, Ukraine, 8–12 July 2025): book of abstracts. – Lviv, 2025. – P. 95.

URL: <https://xvuac.mmf.com.ua/index.php/abstracts>

9. Оцінка структури дисертації, її мови та стилю викладення.

Дисертація за структурою, мовою та стилем викладення відповідає вимогам МОН України.

За результатами фахового семінару зроблено висновки:

1. Дисертація Самарук Н.М. на тему «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи» є завершеною науковою працею, у якій розв'язано конкретне наукове завдання, а саме: опис спеціальних функцій, які є квазі-мономами відносно підгруп афінної групи площини та простору, що має важливе значення для галузі знань 11 Математика та статистика.

2. За темою дисертації опубліковано 8 наукових публікацій, де повністю відображені основні результати дисертації, з них 2 публікації у журналах, які індексуються наукометричною базою Scopus, 1 публікація у фаховому журналі України та 5 тез доповідей міжнародних та всеукраїнських конференцій.

3. Дисертація відповідає вимогам Постанови Кабінету Міністрів України «Про затвердження Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» від 12.01.2022 р. № 44 (зі змінами) та Вимогам до оформлення дисертації, затвердженими наказом МОН України від 12.01.2017 р. № 40 (зі змінами).

4. Рекомендувати дисертацію «Квазі-мономіальні многочлени підгруп афінної групи», подану Самарук Наталією Миколаївною на здобуття ступеня доктора філософії, для подання до розгляду та захисту у спеціалізованій вченій раді Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.

5. Розглянувши заяви і документи голови СВР, рецензентів і опонентів, та встановивши, що подані документи відповідають вимогам до членів спеціалізованої вченої ради згідно «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» (Постанова КМУ від 12.01.2022 № 44 (зі змінами)), пропонувати вченій раді Університету призначити наступний склад разової ради:

Голова разової спеціалізованої вченої ради

– **Загороднюк Андрій Васильович** — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного і функціонального аналізу Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.

1. Chopiuk Y., Zagorodnyuk A. Symmetric Functions and Rings of Multinumerals Associated with Finite Groups. *Symmetry* 2025, 17, 33.

Ключові слова: symmetric analytic functions on Banach spaces, algebras of analytic functions, algebraic bases, semidirect product, block-symmetric polynomials

DOI: 10.3390/sym17010033

URL:

<https://www.scopus.com/pages/publications/85215821960?origin=resultslist>

2. Faryma D., Kimak V., Kravtsiv V., Zagorodnyuk A. On block-supersymmetric polynomials on Banach spaces. *Algebra and Discrete Mathematics*. Volume 40 (2025). Number 1, 14–26.

Ключові слова: symmetric polynomials on Banach spaces, supersymmetric polynomials, block-supersymmetric polynomials, symmetric analytic functions

DOI: [10.12958/adm2416](https://doi.org/10.12958/adm2416)

URL:

<https://www.scopus.com/pages/publications/105021134362?origin=resultslist>

3. Baziv, N.; Zagorodnyuk, A. Analytic Invariants of Semidirect Products of Symmetric Groups on Banach Spaces. *Symmetry* 2023, 15, 2117.

Ключові слова: symmetric analytic functions on Banach spaces, algebras of analytic functions, algebraic bases, semidirect product, block-symmetric polynomials

DOI: 10.3390/sym15122117

URL:

<https://www.scopus.com/pages/publications/85180652226?origin=resultslist>

Офіційні опоненти:

– **Сохацький Федір Миколайович** – доктор фізико-математичних наук, доцент, старший науковий співробітник Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (відділ алгебри).

1. Ф. М. Сохацький, Г. В. Крайнічук, В. А. Лужецький. Канонічні та матричні задання квазігруп четвертого порядку // *Прикладні проблеми механіки і математики*. – 2024. – Вип. 22. – С. 95–105.

Ключові слова: квазігрупа, лупа, канонічний розклад, матриця, ізотопізм, ізоморфізм, група Кляйна, циклічна група.

DOI: <https://doi.org/10.15407/apmm2024.22.95-105>

URL: <http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/view/3617>

2. Sokhatsky, F.M., Lutsenko, A.V., Fryz, I.V. Construction of Quasigroups with Invertibility Properties. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2024, 279(2), pp. 115–132.

Ключові слова: automorphism; congruence; endomorphism; full matrix; matrix equation; matrix quasigroup; quasigroup; ring; semigroup; Toeplitz matrix.

DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06999-0>

URL: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506920028>

3. Fryz I., Sokhatsky F. Construction of medial ternary self-orthogonal quasigroups. *Buletinul Academiei De Stiinte A Republicii Moldova. Matematica*, 2022, No 3, pp. 41–55.

Ключові слова: central quasigroup; determinant; medial quasigroup; orthogonal quasigroups; polynomial; self-orthogonal quasigroup; strongly self-orthogonal quasigroup.

DOI: <https://doi.org/10.56415/basm.y2022.i3.p41>

URL: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6506920028>

– **Олійник Андрій Степанович** – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри алгебри і комп’ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

1. Nowak P.W., Oliynyk A., Prokhorcchuk V. On reversible automata generating lamplighter groups. *Journal of Algebra*, 2025, 661, pp. 578–594.

Ключові слова: Automaton group; Finite automaton; Fundamental group; Lamplighter group; Reversible automaton; Self-similar action; Square complex.

DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2024.07.043>

URL: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55240479800>

2. Lavrenyuk Y.V., Oliynyk A.S. Minimal generating sets in groups of p-automata. *Carpathian Mathematical Publications*, 2023, 15(2), pp. 608–613.

Ключові слова: finite automaton; minimal generating set; p-automaton.

DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.15.2.608-613>

URL: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55240479800>

3. Oliynyk A. Free products of cyclic groups in groups of infinite unitriangular matrices. *Matematychni Studii*, 2023, 60(1), pp. 28–33.

Ключові слова: free product; infinite unitriangular matrix; Jordan block; nilpotent matrix.

DOI: <https://doi.org/10.30970/ms.60.1.28-33>

URL: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55240479800>

Рецензенти:

– **Марцінків Марія Володимирівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.

1. Kravtsiv V., Martsinkiv M., Yaselskyi A. Analogues of Waring-Girard formulas for the block-symmetric polynomials on the spaces $l_1(C^2)$ and $l_p(C^2)$. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2024. Issue 96. P. 61-70.

Ключові слова: symmetric polynomials, block-symmetric polynomials, Waring-Girard formulas.

DOI: <http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2024.96.061-070>

URL:

<https://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmfa/article/view/13414>

2. Chernega I., Martsinkiv M., Vasylyshyn T., Zagorodnyuk A. Applications of Supersymmetric Polynomials in Statistical Quantum Physics. Quantum Reports. 2023, 5(4), 683-697.

Ключові слова: quantum ideal gas; grand partition function; supersymmetric polynomials on Banach spaces; algebraic basis; topological semi-ring; tropical semi-ring.

DOI: <https://doi.org/10.3390/quantum5040043>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85180710942>

3. Гандера-Калиновська О.В., Марцінків М.В. Формули Варінга-Гіларда для симетричних та суперсиметричних поліномів та їх застосування. Прикарпатський вісник НТШ. Число. 2025, 20(76). С. 39 –47.

Ключові слова: симетричні поліноми, суперсиметричні поліноми, формула Варінга-Гіларда, банахів простір, комбінаторика, ізоморфізм, тотожності Ньютона, алгебраїчний базис.

DOI: [https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20\(76\)-39-47](https://doi.org/10.31471/2304-7399-2025-20(76)-39-47)

URL: <https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/2082>

4. Martsinkiv M.V., Vasylyshyn S.I., Vasylyshyn T.V., Zagorodnyuk A.V. Lipschitz symmetric functions on Banach spaces with symmetric bases. Carpathian Mathematical Publications. 2021, 13(3), 727-733.

Ключові слова: Lipschitz symmetric function on Banach space, symmetric basis, tropical polynomial.

DOI: <https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.727-733>

URL: <https://www.scopus.com/pages/publications/85122209319>

– **Василишин Тарас Васильович** — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного і функціонального аналізу Карпатського національного університету імені Василя Стефаника.

1. Ponomarov R., Vasylyshyn T. Symmetric Polynomials on Cartesian Products of Banach Spaces of Lebesgue Integrable Functions. *Carpathian Math. Publ.* 2025, 17, 483-515.

Ключові слова: polynomial, entire function, symmetric function, algebraic basis, Banach space of Lebesgue integrable functions

DOI: 10.15330/cmp.17.2.483-515

URL:

<https://www.scopus.com/pages/publications/105026233234?origin=resultslist>

2. Bandura, A.; Kravtsiv, V.; Vasylyshyn, T. Algebraic Basis of the Algebra of All Symmetric Continuous Polynomials on the Cartesian Product of p -Spaces. *Axioms* 2022, 11, 41.

Ключові слова: symmetric polynomial on a Banach space; continuous polynomial on a Banach space; algebraic basis; space of p -summable sequences

DOI: 10.3390/axioms11020041

URL:

<https://www.scopus.com/pages/publications/85123407976?origin=resultslist>

3. Ponomarov, R. V., Vasylyshyn, T. V. Algebraic bases of some algebras of polynomials on Banach spaces. *Matematychni Studii*, 64(1), 2025. 81-91.

Ключові слова: algebraic basis, polynomial on Banach space, symmetric function, complexification of real Banach space, space of Lebesgue integrable functions

DOI: 10.30970/ms.64.1.81-91

URL:

<https://www.scopus.com/pages/publications/105017628811?origin=resultslist>

Голова фахового семінару
доктор фізико-математичних наук,
професор, декан факультету
математики та інформатики
Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника



Сергій ШАРИН

Секретар фахового семінару
старший лаборант кафедри
математичного і функціонального аналізу
Карпатського національного
університету імені Василя Стефаника



Ольга ВАСИЛИК

31 березня 2026 р.